Kapitel PTS:VII

VII. Gesetz der großen Zahlen

- ❑ Ungleichung von Tschebyscheff
- ❑ Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen
- ❑ Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Bemerkungen:

- Im Jahr 1909 gelang es Émile Borel (1871–1956, französischer Mathematiker), das sogenannte *starke Gesetz der großen Zahlen* abzuleiten, aus dem das Bernoulli'sche Gesetz gefolgert werden kann – letzteres nennt man daher manchmal auch *schwaches Gesetz der großen Zahlen*.

Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

- Vergröberte Abschätzung Bernoullis mit $\frac{X}{n} = H_n(A)$ und $\delta = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$:

$$P\left(|H_n(A) - p| < \varepsilon\right) \;\geq\; 1 - \delta \quad \text{für} \quad n \geq n_0 \,.$$

Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

- Vergröberte Abschätzung Bernoullis mit $\frac{X}{n} = H_n(A)$ und $\delta = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$:

$$P\left(|H_n(A) - p| < \varepsilon\right) \;\geq\; 1 - \delta \quad \text{für} \quad n \geq n_0\ .$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0{,}01$ und $\delta = 0{,}02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.

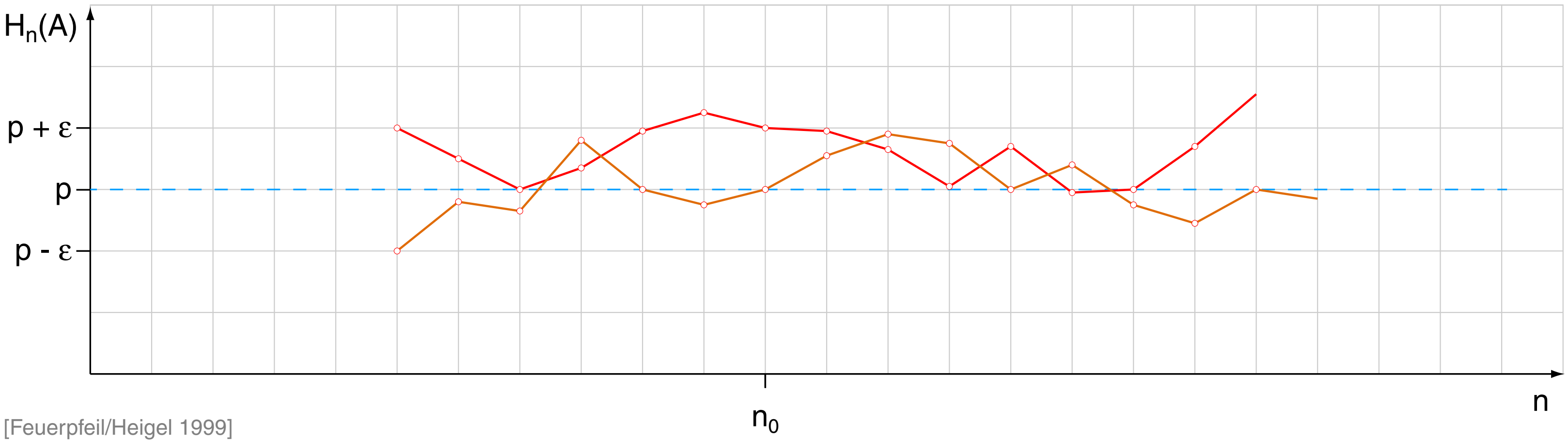
Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

- Vergröberte Abschätzung Bernoullis mit $\frac{X}{n} = H_n(A)$ und $\delta = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$:

$$P\left(|H_n(A) - p| < \varepsilon\right) \;\geq\; 1 - \delta \quad \text{für} \quad n \geq n_0 \,.$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0{,}01$ und $\delta = 0{,}02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.

- Gemessene relative Häufigkeiten $H_n(A)$ in zwei Versuchsfolgen als Pfade:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

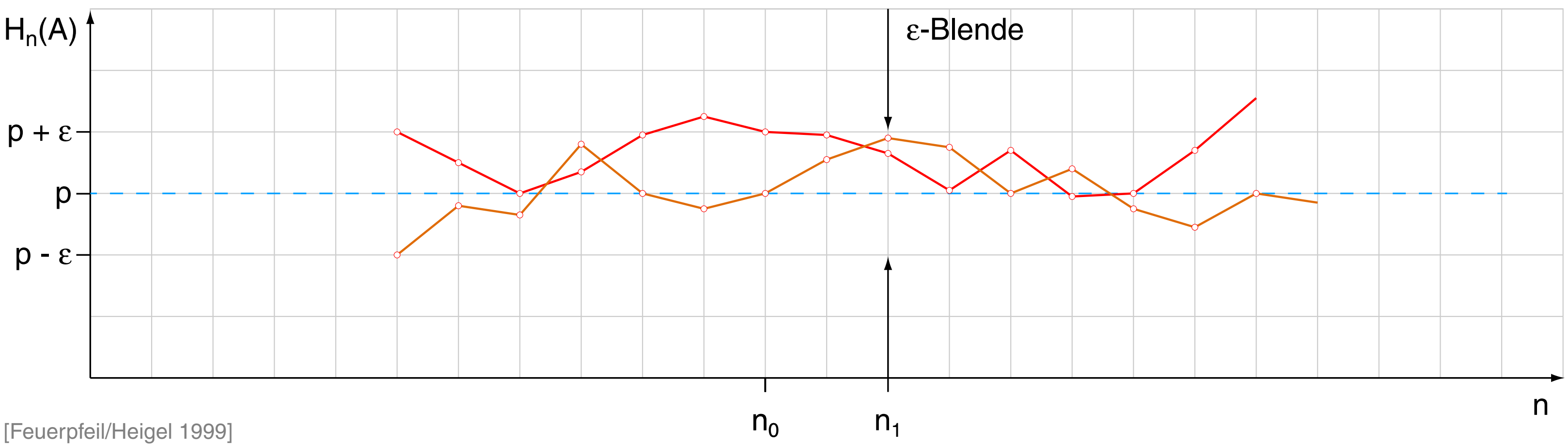
Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

- Vergröberte Abschätzung Bernoullis mit $\frac{X}{n} = H_n(A)$ und $\delta = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$:

$$P\left(|H_n(A) - p| < \varepsilon\right) \;\geq\; 1 - \delta \quad \text{für} \quad n \geq n_0 \;.$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0{,}01$ und $\delta = 0{,}02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.

- Gemessene relative Häufigkeiten $H_n(A)$ in zwei Versuchsfolgen als Pfade:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Interpretation der Abschätzung: Mit großer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \delta$ durchläuft ein Pfad eine einzelne „ε-Blende" bei $n_1 \geq n_0$.
Für $\delta = 0{,}02$ gehen von 100 Pfaden durchschnittlich 98 durch ε-Blende n_1.

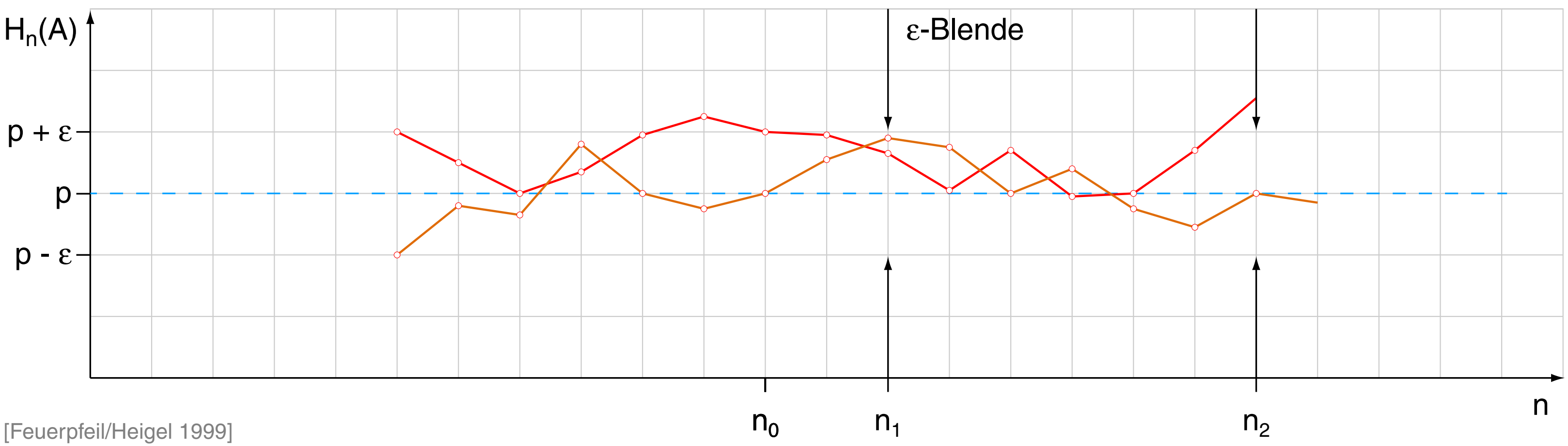
Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

- Vergröberte Abschätzung Bernoullis mit $\frac{X}{n} = H_n(A)$ und $\delta = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$:

$$P\left(|H_n(A) - p| < \varepsilon\right) \;\geq\; 1 - \delta \quad \text{für} \quad n \geq n_0\ .$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0{,}01$ und $\delta = 0{,}02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.

- Gemessene relative Häufigkeiten $H_n(A)$ in zwei Versuchsfolgen als Pfade:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Das Bernoulli'sche Gesetz schließt jedoch nicht aus, dass ein Pfad, der die ε-Blende bei n_1 passiert, eine zweite Blende bei $n_2 > n_1$ nicht passiert.
  Ein solcher Pfad würde sich entgegen unserer Erwartung wieder um mehr als ε von p entfernen; wobei die Wahrscheinlichkeit dafür mit n abnimmt.

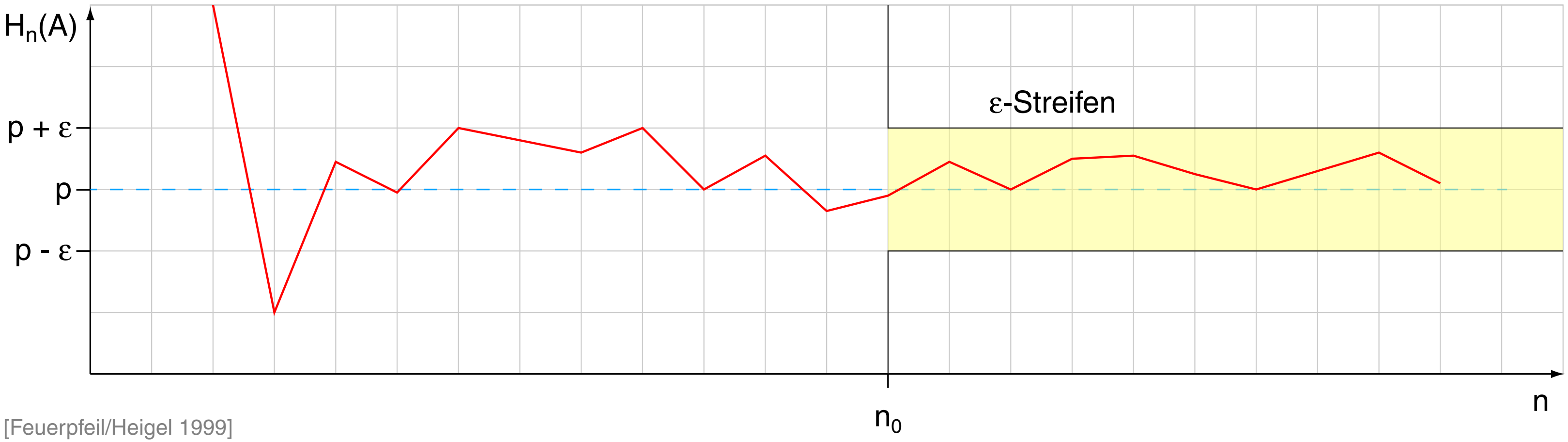
Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

- Vergröberte Abschätzung Bernoullis mit $\frac{X}{n} = H_n(A)$ und $\delta = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$:

$$P\left(|H_n(A) - p| < \varepsilon\right) \;\geq\; 1 - \delta \quad \text{für} \quad n \geq n_0 \;.$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0{,}01$ und $\delta = 0{,}02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.

- Gemessene relative Häufigkeiten $H_n(A)$ in zwei Versuchsfolgen als Pfade:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Wünschenswert wäre, wenn ein Pfad mit Mindestwahrscheinlichkeit $1 - \delta$ rechts von n_0 in einem ε-„Streifen" um p verbleibt.
  Analog: Der Pfad passiert alle ε-Blenden rechts von n_0.

Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

- Borel konnte zeigen, dass neben

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$$

  auch

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon, \quad |H_{n+1}(A) - p| < \varepsilon, \quad \ldots) \geq 1 - \delta$$

  gilt.

- Das heißt, ein Pfad der $(n; H_n(A))$-Punkte verläuft ab einem bestimmten n_0 mit der Mindestwahrscheinlichkeit $1 - \delta$ in einem ε-Streifen.

- Es lässt sich beweisen, dass die Borel'sche Aussage des ε-Streifens äquivalent ist zur Gleichung

$$P\left(\lim_{n\to\infty} (H_n(A) - p) = 0 \right) = 1 \ .$$