Kapitel PTS:VII

VII. Gesetz der großen Zahlen

- Ungleichung von Tschebyscheff
- Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen
- Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

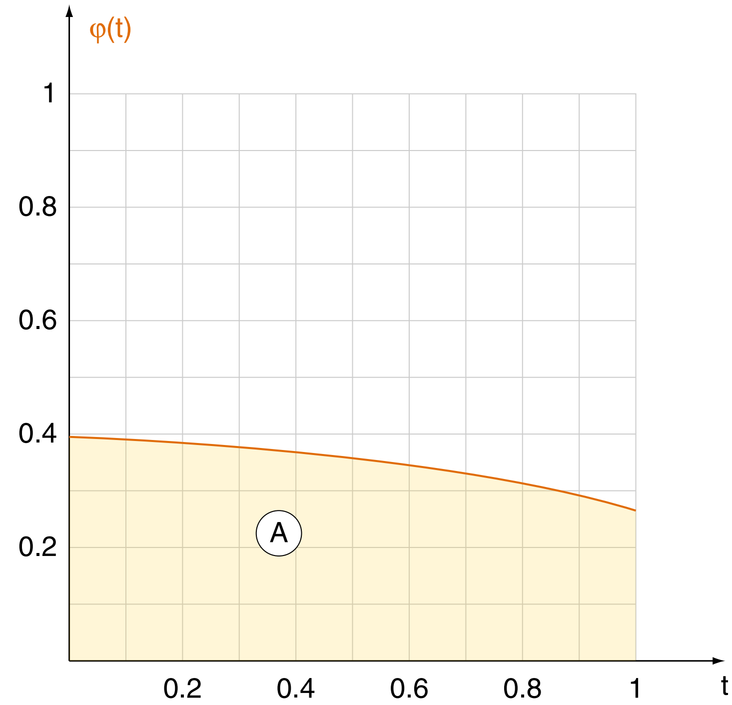
Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: Flächeninhalt bestimmen

- Gegeben die Funktion

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

- Was ist der Flächeninhalt A unter der $\varphi(t)$-Kurve im Intervall $[0; 1]$?



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: Flächeninhalt bestimmen

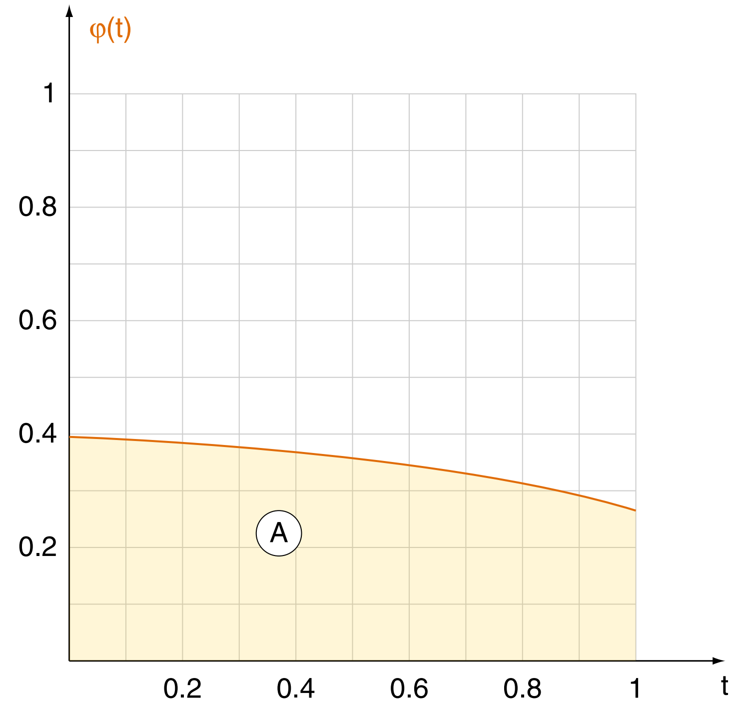
- Gegeben die Funktion

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

- Was ist der Flächeninhalt A unter der $\varphi(t)$-Kurve im Intervall $[0;1]$?

Ansatz 1: Analytische Integration

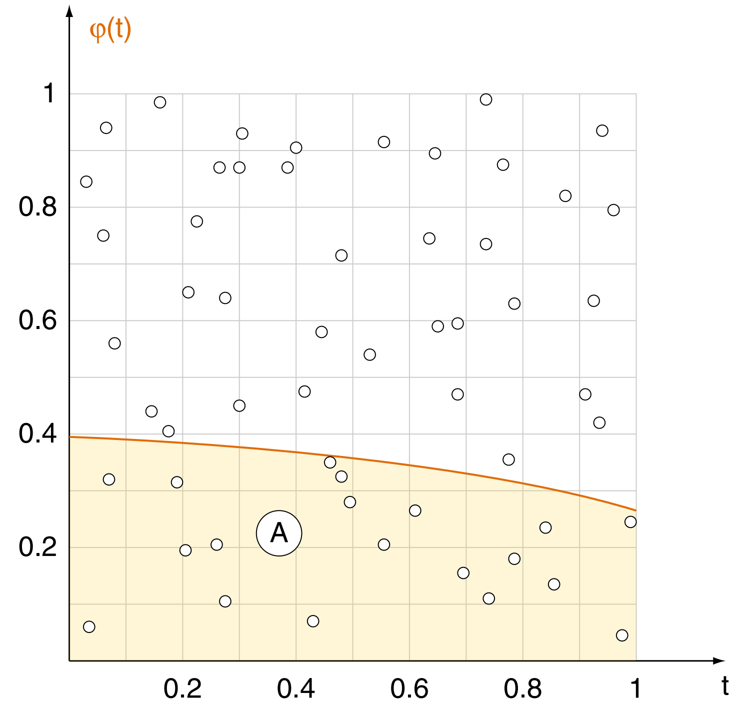
- Das Integral $\int_0^1 \varphi(t)dt$ lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: Flächeninhalt bestimmen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Gegeben die Funktion

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

- Was ist der Flächeninhalt A unter der $\varphi(t)$-Kurve im Intervall $[0;1]$?

Ansatz 1: Analytische Integration

- Das Integral $\int_0^1 \varphi(t)dt$ lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken.

Ansatz 2: Numerische Integration mit der Monte-Carlo-Methode

- „Würfele“ n Punkte im Einheitsquadrat.
  Das Einheitsquadrats mit Fläche 1 entspricht Ω; Fläche $A \approx$ „Punkt unter φ-Kurve gewürfelt“.
- Liegen X dieser Punkte in der Fläche A unter der φ-Kurve, so gilt

$$\frac{X}{n} \approx \frac{A}{1} \, .$$

- Je größer n, desto besser die Näherung.

Bemerkungen:

- $\varphi(t)$ ist die Gauß'sche Glockenkurve, die Dichtefunktion der Normalverteilung.

- Die Monte-Carlo-Methode ist ein stochastisches Verfahren zur Bestimmung des Flächeninhalts.

- Die Monte-Carlo-Methode ist erst wirklich praktikabel geworden, seit es Computer gibt. Führt man beispielsweise mit einem Programm das Experiment des „Würfelns" von n Punkten $(x;y)$ im Einheitsquadrat durch (also $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$), so könnte sich etwa ergeben:

n	X	$\frac{X}{n}$
2.000	655	0,3275
4.000	1346	0,3365
6.000	2028	0,3380
8.000	2702	0,3378
10.000	3386	0,3386

  Das konvergiert offenbar recht langsam gegen den eigentlichen Tabellenwert $A = 0{,}3413$. Trotzdem wird die Methode oft eingesetzt, da beispielsweise Inhalte mehrdimensionaler Körper häufig nur so berechnet werden können.

- Der Flächeninhalt A unter der Glockenkurve wird mit der Monte-Carlo-Methode im Prinzip als Bernoulli-Kette des „Würfelns" von Zufallspunkten und des Mitzählens der Treffer (Punkt innerhalb der A-Fläche) bestimmt.

- Das Folgende dreht sich allgemein um die Näherung der relativen Trefferhäufigkeit in einer Bernoulli-Kette an die Trefferwahrscheinlichkeit.

Ungleichung von Tschebyscheff

Motivation

- Die Standardabweichung σ ist ein Maß für die Abweichung der Werte einer Zufallsgröße X vom Erwartungswert μ.
- Kleines σ: X nimmt mit großer Wahrscheinlichkeit Werte in der Nähe des Erwartungswertes an.
- Großes σ: X nimmt mit großer Wahrscheinlichkeit auch Werte an, die weiter vom Erwartungswert entfernt sind.

Ungleichung von Tschebyscheff

Motivation

- Die Standardabweichung σ ist ein Maß für die Abweichung der Werte einer Zufallsgröße X vom Erwartungswert μ.
- Kleines σ: X nimmt mit großer Wahrscheinlichkeit Werte in der Nähe des Erwartungswertes an.
- Großes σ: X nimmt mit großer Wahrscheinlichkeit auch Werte an, die weiter vom Erwartungswert entfernt sind.

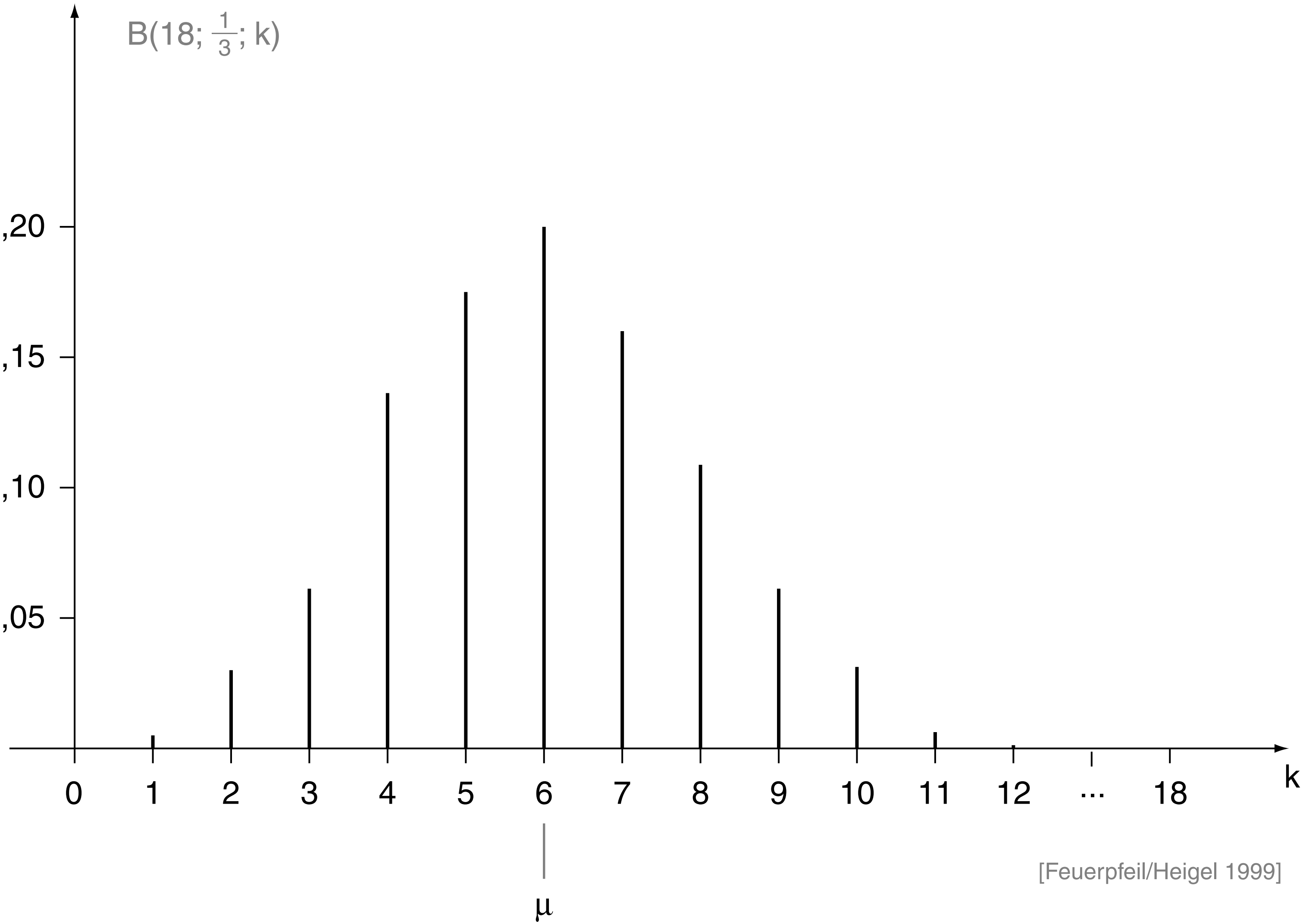
➜ Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsgröße X um mehr als eine Konstante c von ihrem Erwartungswert μ abweicht?

In Zeichen: $P(|X - \mu| \geq c)$ für $c > 0$.

- Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich in einer Ungleichung präzisieren.
- Die Anwendung der Ungleichung führt zu einer fundamentalen Aussage der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ungleichung von Tschebyscheff

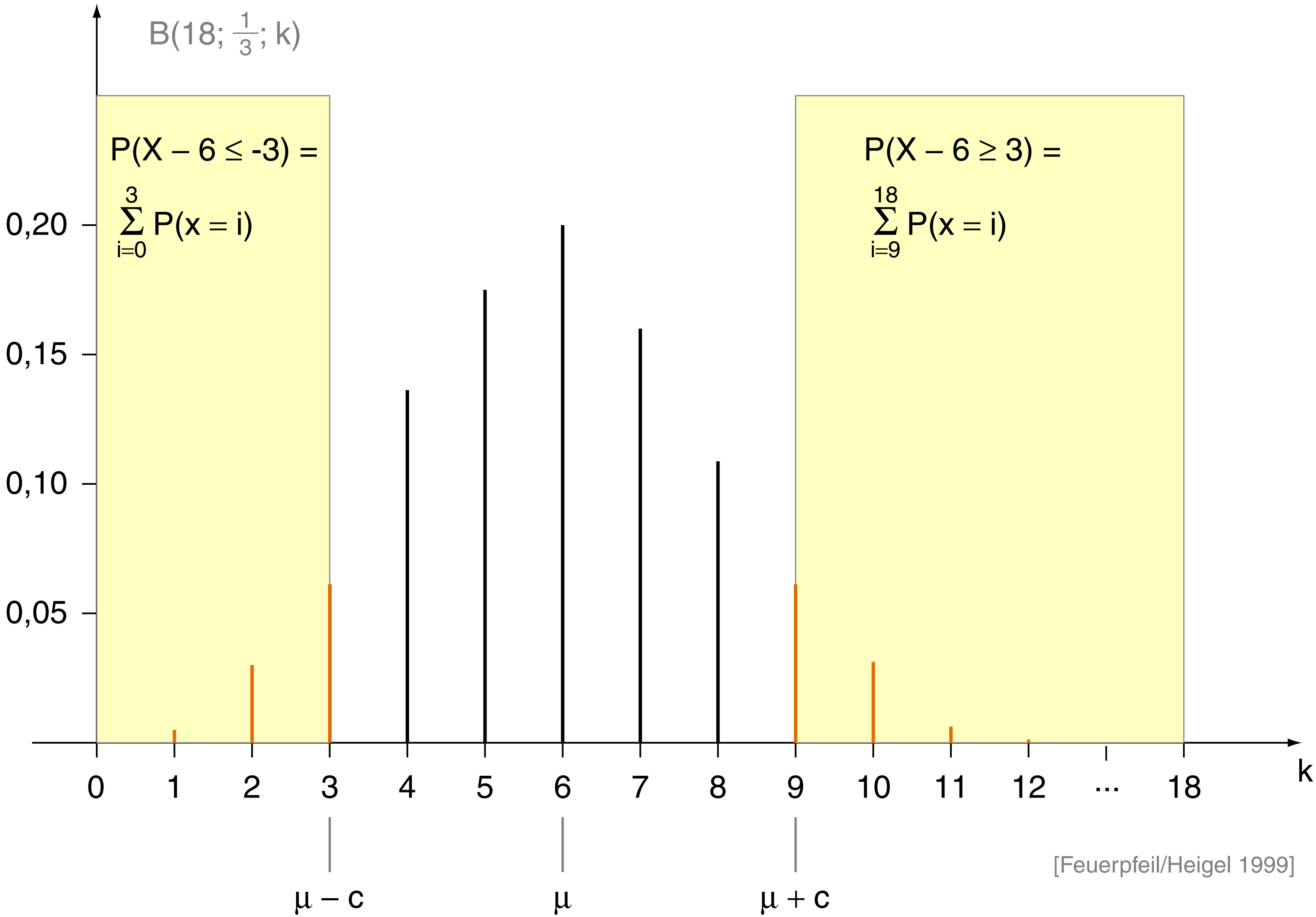
Beispiel: $B(18; \frac{1}{3})$ mit $\mu = 6$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: $B(18; \frac{1}{3})$ mit $\mu = 6$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Für $c = 3$, lässt sich $P(|X-6| \geq 3)$ als Summe der roten Stablängen in den unterlegten Bereichen des Stabdiagramms darstellen.
- Die rechte hinterlegte Fläche reicht bis zum x-Wert 18. Die Wahrscheinlichkeiten ab 13 sind nicht mehr als sichtbare Stäbe darstellbar.
- $P(|X-\mu| \geq c)$ kann man für einen Wert von c berechnen, wenn die Verteilung bekannt ist.
- Liegen nur die Parameter μ und σ vor – meist als Erfahrungswerte –, steht ein Zusammenhang zwischen $P(|X-\mu| \geq c)$ und σ zu vermuten, da σ eine Aussage über die Streuung der Werte um den Erwartungswert trifft.

Ungleichung von Tschebyscheff

Satz 1 (Ungleichung von Tschebyscheff)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$. Dann gilt für jedes $c > 0$ die Ungleichung

$$P(|X - E(X)| \geq c) \ \leq \ \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2} \ .$$

Ungleichung von Tschebyscheff

Satz 1 (Ungleichung von Tschebyscheff)

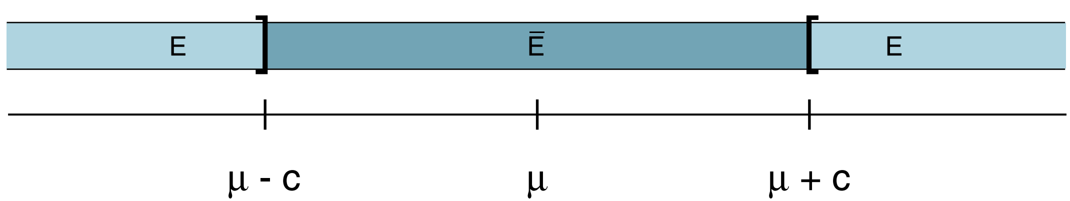
Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$. Dann gilt für jedes $c > 0$ die Ungleichung

$$P(|X - E(X)| \geq c) \;\leq\; \frac{\text{Var}(X)}{c^2}\;.$$

Herleitung:

- Sei X eine Zufallsgröße mit $E(X) = \mu$ und Var$(X) = \sigma^2$.
- Seien $E = |X - \mu| \geq c$ und $\bar{E} = |X - \mu| < c$ Ereignisse mit $E(X) = \mu$.
- In Mengenschreibweise gilt:

$$E = \{x_i : |x_i - \mu| \geq c\} \qquad \text{und} \qquad \bar{E} = \{x_i : |x_i - \mu| < c\}$$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ungleichung von Tschebyscheff

Herleitung

- Die Varianz $\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ der Zufallsgröße X wird in zwei Teilsummen für E und $\bar{E}$ zerlegt:

$$\sigma^2 = \sum_{x_i \in E} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) + \sum_{x_i \in \bar{E}} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \; .$$

Ungleichung von Tschebyscheff
Herleitung

- Die Varianz Var$(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ der Zufallsgröße X wird in zwei Teilsummen für E und $\bar{E}$ zerlegt:

$$\sigma^2 \;=\; \sum_{x_i \in E} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) + \sum_{x_i \in \bar{E}} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\ .$$

- Die Summanden sind nicht-negative Zahlen, so dass der Wert der Summe nicht steigen kann, wenn die zweite Teilsumme weglassen wird:

$$\sigma^2 \;\geq\; \sum_{x_i \in E} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\ .$$

Ungleichung von Tschebyscheff

Herleitung

- Die Varianz Var$(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ der Zufallsgröße X wird in zwei Teilsummen für E und $\bar{E}$ zerlegt:

$$\sigma^2 \;=\; \sum_{x_i \in E} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) + \sum_{x_i \in \bar{E}} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\ .$$

- Die Summanden sind nicht-negative Zahlen, so dass der Wert der Summe nicht steigen kann, wenn die zweite Teilsumme weglassen wird:

$$\sigma^2 \;\geq\; \sum_{x_i \in E} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\ .$$

- Für die $x_i \in E$ gilt $|x_i - \mu| \geq c$, was $(x_i - \mu)^2 \geq c^2$ zur Folge hat:

$$\sigma^2 \;\geq\; \sum_{x_i \in E} c^2 \cdot P(X = x_i) \;=\; c^2 \cdot \sum_{x_i \in E} P(X = x_i) \;=\; c^2 \cdot P(|X - \mu| \geq c)\ .$$

Ungleichung von Tschebyscheff

Herleitung

- Die Varianz $\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ der Zufallsgröße X wird in zwei Teilsummen für E und $\bar{E}$ zerlegt:

$$\sigma^2 \;=\; \sum_{x_i \in E} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) + \sum_{x_i \in \bar{E}} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\ .$$

- Die Summanden sind nicht-negative Zahlen, so dass der Wert der Summe nicht steigen kann, wenn die zweite Teilsumme weglassen wird:

$$\sigma^2 \;\geq\; \sum_{x_i \in E} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\ .$$

- Für die $x_i \in E$ gilt $|x_i - \mu| \geq c$, was $(x_i - \mu)^2 \geq c^2$ zur Folge hat:

$$\sigma^2 \;\geq\; \sum_{x_i \in E} c^2 \cdot P(X = x_i) \;=\; c^2 \cdot \sum_{x_i \in E} P(X = x_i) \;=\; c^2 \cdot P(|X - \mu| \geq c)\ .$$

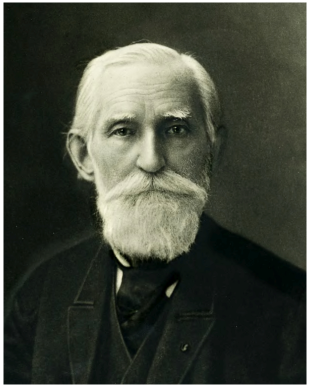
- Damit erhalten wir die Ungleichung:

$$P(|X - \mu| \geq c) \;\leq\; \frac{\sigma^2}{c^2} \qquad \text{oder} \qquad P(|X - E(X)| \geq c) \;\leq\; \frac{\text{Var}(X)}{c^2}\ .$$

Bemerkungen:

- Die Ungleichung von Tschebyscheff gilt für alle Verteilungen von Zufallsgrößen. Die Kenntnis ihrer Varianz erlaubt, Wahrscheinlichkeiten von Mindestabweichungen ihrer Werte nach oben abzuschätzen.

- Die Ungleichung belegt im „Nachhinein“, dass die Standardabweichung σ ein brauchbares Abweichungsmaß ist, denn sie sagt aus, dass Abweichungen von μ, die groß im Vergleich zu σ sind, eine kleine Wahrscheinlichkeit besitzen.



Tschebyscheff

- Ist insbesondere $\sigma = 0$ (degenerierte Verteilung), so ist die Wahrscheinlichkeit Null, dass X Werte verschieden von μ annimmt.

- Gleichwertige Versionen der Ungleichung von Tschebyscheff:

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2} \;\Leftrightarrow\; P(|X - E(X)| < c) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{c^2}\,,$$

$$P(|X - E(X)| > c) < \frac{\text{Var}(X)}{c^2} \;\Leftrightarrow\; P(|X - E(X)| \leq c) > 1 - \frac{\text{Var}(X)}{c^2}\,.$$

- Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff (1821–1894, russischer Mathematiker) veröffentlichte die verbreitet nach ihm benannte Ungleichung im Jahre 1867 im Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Ein allgemeinerer Beweis wurde jedoch schon 1853 von Irénée-Jules Bienaymé (1796–1878, französischer Wahrscheinlichkeitstheoretiker und Statistiker) veröffentlicht. Dieser wurde sogar direkt vor Tschebyscheffs Beitrag abgedruckt. Tschebyscheff erkannte die Erstveröffentlichung von Bienaymé an. [Wikipedia]

Bienaymé

Ungleichung von Tschebyscheff

Untere Grenze

Kann die untere Grenze der Tschebyscheff-Ungleichung verschärft werden?

Ungleichung von Tschebyscheff

Untere Grenze

Kann die untere Grenze der Tschebyscheff-Ungleichung verschärft werden?

Nicht, wenn sie allgemeingültig sein soll.

Herleitung:

- Sei X eine symmetrisch verteilte Zufallsgröße mit Wertemenge $W = \{-c; 0; c\}$ ($c > 0$) für die $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ sein soll. Dann gilt $P(|X - \mu| < c) \ \geq \ 1 - \frac{1}{c^2}$.

Ungleichung von Tschebyscheff

Untere Grenze

Kann die untere Grenze der Tschebyscheff-Ungleichung verschärft werden?

Nicht, wenn sie allgemeingültig sein soll.

Herleitung:

- Sei X eine symmetrisch verteilte Zufallsgröße mit Wertemenge $W = \{-c; 0; c\}$ ($c > 0$) für die $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ sein soll. Dann gilt $P(|X - \mu| < c) \;\geq\; 1 - \frac{1}{c^2}$.
- Aus $P(X = -c) + P(X = 0) + P(X = c) = 1$ und $P(X = -c) = P(X = c)$ (Symmetrie) folgt $P(X = 0) = 1 - 2 \cdot P(X = c)$.

Ungleichung von Tschebyscheff
Untere Grenze

Kann die untere Grenze der Tschebyscheff-Ungleichung verschärft werden?

Nicht, wenn sie allgemeingültig sein soll.

Herleitung:

- Sei X eine symmetrisch verteilte Zufallsgröße mit Wertemenge $W = \{-c; 0; c\}$ $(c > 0)$ für die $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ sein soll. Dann gilt $P(|X - \mu| < c) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$.
- Aus $P(X = -c) + P(X = 0) + P(X = c) = 1$ und $P(X = -c) = P(X = c)$ (Symmetrie) folgt $P(X = 0) = 1 - 2 \cdot P(X = c)$.
- Mit $\sigma^2 = 1$ und $\sigma^2 = 2c^2 \cdot P(X = c)$ ist $P(X = c) = \frac{1}{2c^2}$.
- Die Verteilung von X lautet damit:

x_i	$-c$	0	c
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2c^2}$	$1 - \frac{1}{c^2}$	$\frac{1}{2c^2}$

Ungleichung von Tschebyscheff

Untere Grenze

Kann die untere Grenze der Tschebyscheff-Ungleichung verschärft werden?

Nicht, wenn sie allgemeingültig sein soll.

Herleitung:

- Sei X eine symmetrisch verteilte Zufallsgröße mit Wertemenge $W = \{-c; 0; c\}$ $(c > 0)$ für die $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ sein soll. Dann gilt $P(|X - \mu| < c) \;\geq\; 1 - \frac{1}{c^2}$.
- Aus $P(X = -c) + P(X = 0) + P(X = c) = 1$ und $P(X = -c) = P(X = c)$ (Symmetrie) folgt $P(X = 0) = 1 - 2 \cdot P(X = c)$.
- Mit $\sigma^2 = 1$ und $\sigma^2 = 2c^2 \cdot P(X = c)$ ist $P(X = c) = \frac{1}{2c^2}$.
- Die Verteilung von X lautet damit:

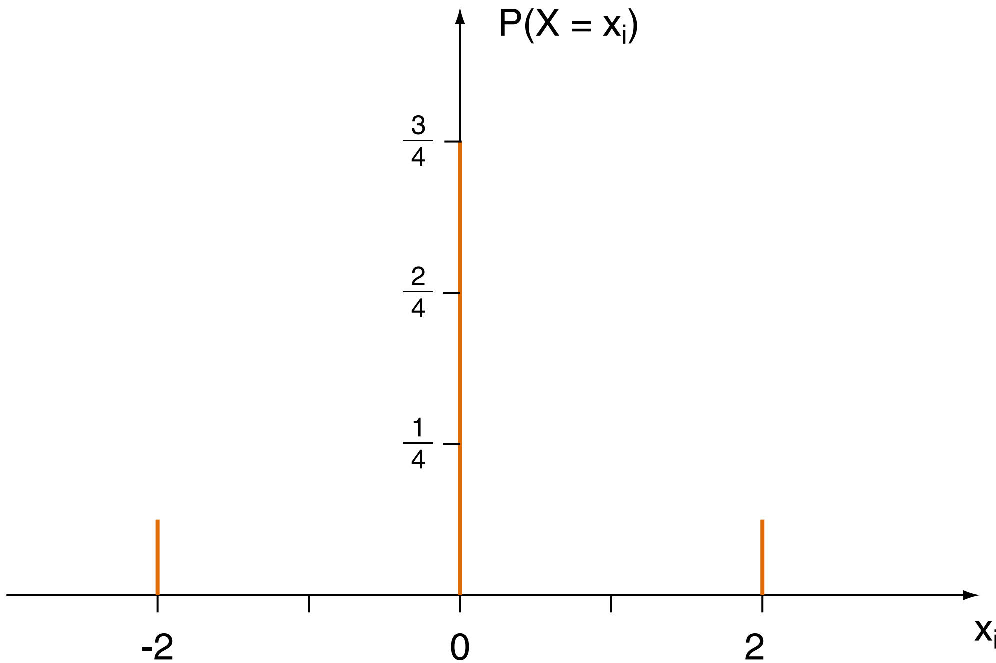
x_i	$-c$	0	c
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2c^2}$	$1 - \frac{1}{c^2}$	$\frac{1}{2c^2}$

- Daraus folgt $P(|X - \mu| < c) = P(X = 0) = 1 - \frac{1}{c^2}$, was die untere Grenze der Tschebyscheff-Ungleichung ist.

Bemerkungen:

- Beispiel der Verteilung von X für $c = 2$:

x_i	-2	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$1 - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

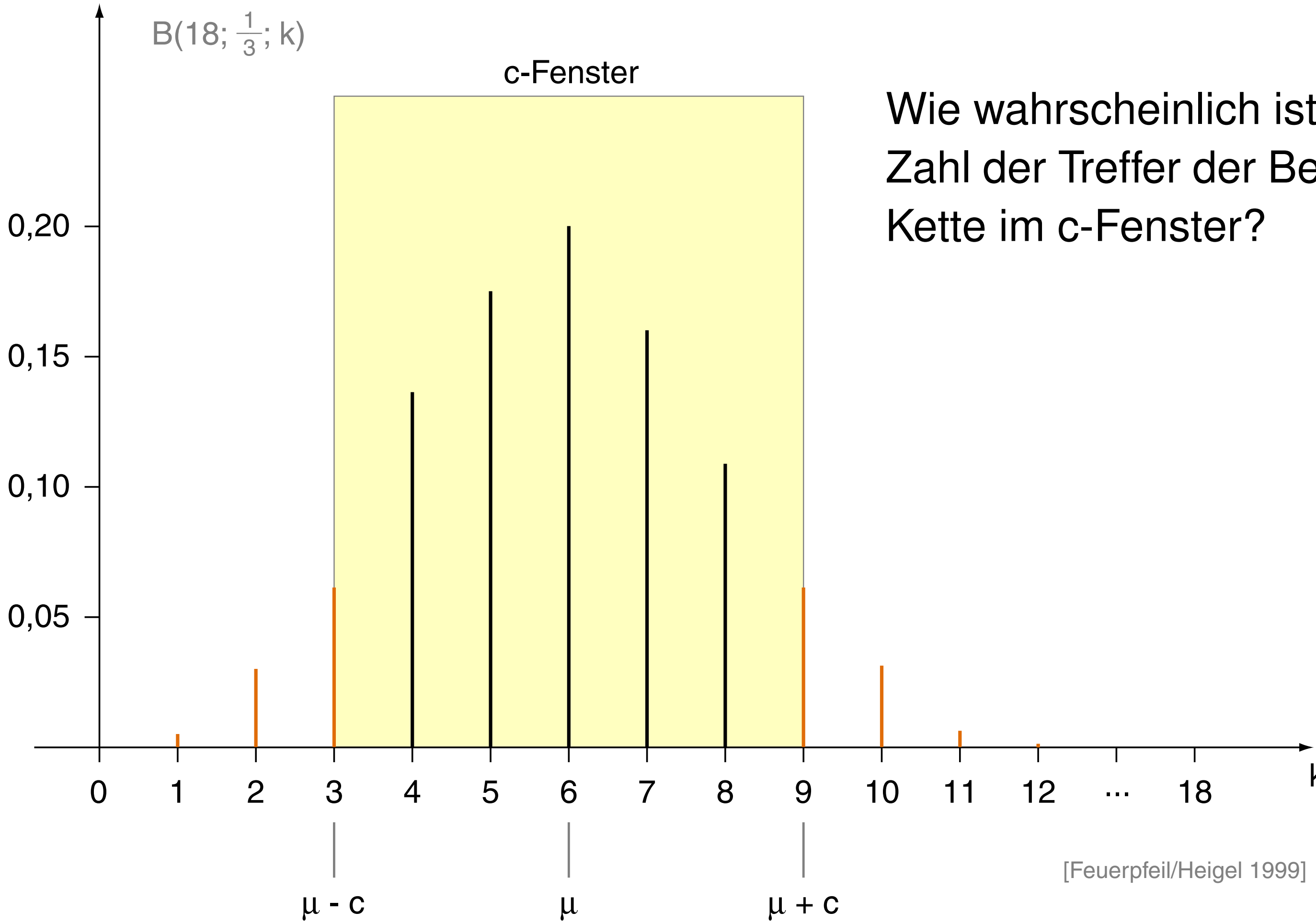


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ungleichung von Tschebyscheff

$k\sigma$-Regel

Beispiel: $B(18; \frac{1}{3})$ mit zwei Flügeln der Breite $c = 3$ („c-Fenster“) um $\mu = 6$.



Wie wahrscheinlich ist die Zahl der Treffer der Bernoulli-Kette im c-Fenster?

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ungleichung von Tschebyscheff

$k\sigma$-Regel

- Nach Tschebyscheff-Ungleichung fällt höchstens der Anteil $\frac{\sigma^2}{c^2}$ der Werte aus dem c-Fenster heraus.
- Ist c ein Vielfaches der Standardabweichung σ, also $c = k \cdot \sigma$, erhält man die „schöne" Form der Tschebyscheff-Ungleichung als $k\sigma$-Regel:

$$P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \;\leq\; \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}\;.$$

- Daraus ergeben sich folgende Abschätzungen für $B(18; \frac{1}{3})$:

k	$P(\lvert X-\mu\rvert \geq k\sigma)$	$P(\lvert X-\mu\rvert < k\sigma)$
2	$\leq \frac{1}{4} = 25\%$	$\geq \frac{3}{4} = 75\%$
3	$\leq \frac{1}{9} \approx 11\%$	$\geq \frac{8}{9} \approx 89\%$
4	$\leq \frac{1}{16} \approx 6\%$	$\geq \frac{15}{16} \approx 94\%$
5	$\leq \frac{1}{25} = 4\%$	$\geq \frac{24}{25} = 96\%$

- Jede Zufallsgröße nimmt also mit mindestens 96% Wahrscheinlichkeit einen Wert im 5σ-Fenster an und mit höchstens 4% Wahrscheinlichkeit außerhalb.

Ungleichung von Tschebyscheff

Güte der Abschätzung

Wie scharf sind die Abschätzungen der Tschebyscheff-Ungleichung?

Ungleichung von Tschebyscheff

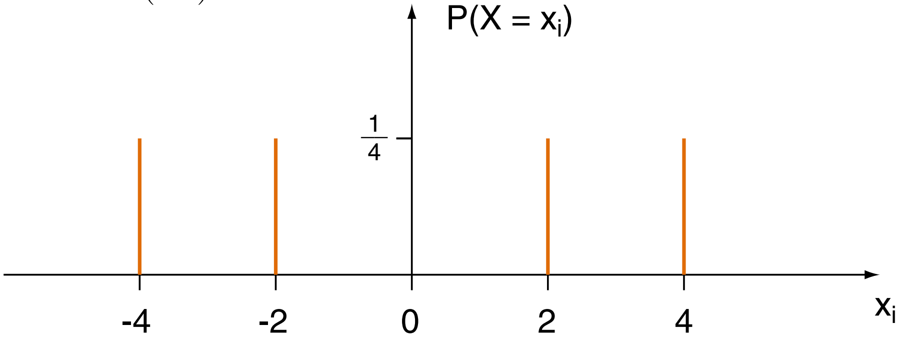
Güte der Abschätzung

Wie scharf sind die Abschätzungen der Tschebyscheff-Ungleichung?

Beispiel: Zufallsgröße X mit $E(X) = 0$ und Var$(X) = 10$.

- Gegeben die Verteilung von X:

x_i	-4	-2	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

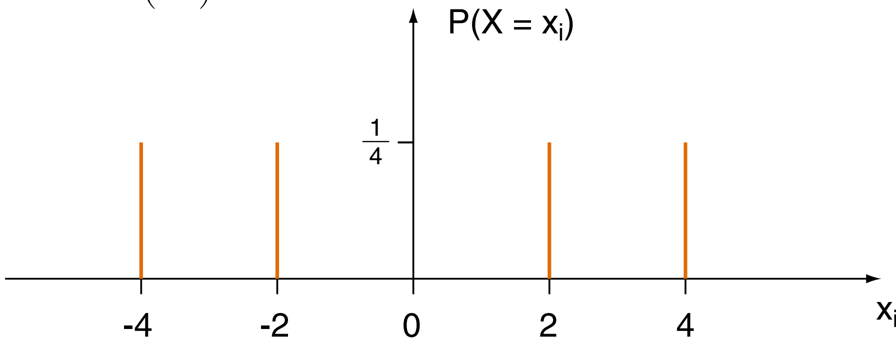
Güte der Abschätzung

Wie scharf sind die Abschätzungen der Tschebyscheff-Ungleichung?

Beispiel: Zufallsgröße X mit $E(X) = 0$ und Var$(X) = 10$.

- Gegeben die Verteilung von X:

x_i	-4	-2	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Abschätzungen vs. exakte Wahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeit	**exakter Wert**	**Abschätzung**
$P(\|X\| < 2)$	0%	$\geq 1 - \frac{10}{4} = -\frac{3}{2} \geq 0$

Ungleichung von Tschebyscheff

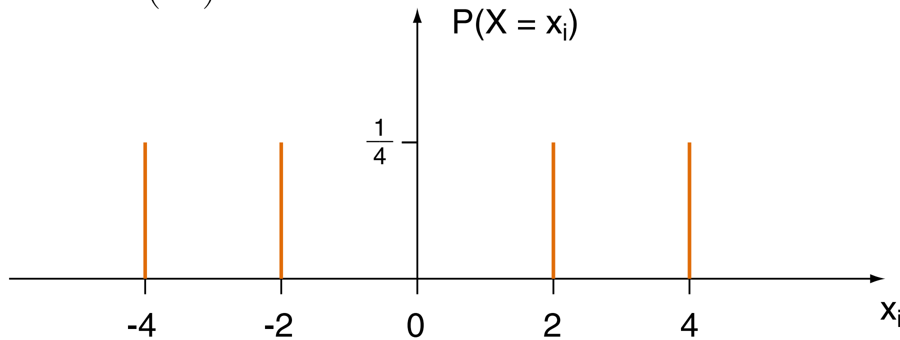
Güte der Abschätzung

Wie scharf sind die Abschätzungen der Tschebyscheff-Ungleichung?

Beispiel: Zufallsgröße X mit $E(X) = 0$ und Var$(X) = 10$.

- Gegeben die Verteilung von X:

x_i	-4	-2	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Abschätzungen vs. exakte Wahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeit	**exakter Wert**	**Abschätzung**
$P(\|X\| < 2)$	0%	$\geq 1 - \frac{10}{4} = -\frac{3}{2} \geq 0$ (wertlos)
$P(\|X\| < 3)$	50%	$\geq 1 - \frac{10}{9} = -\frac{1}{9} \geq 0$ (wertlos)

Ungleichung von Tschebyscheff

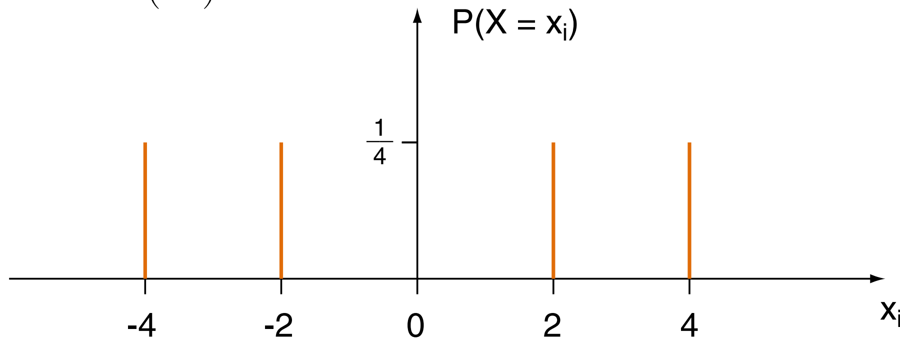
Güte der Abschätzung

Wie scharf sind die Abschätzungen der Tschebyscheff-Ungleichung?

Beispiel: Zufallsgröße X mit $E(X) = 0$ und Var$(X) = 10$.

- Gegeben die Verteilung von X:

x_i	-4	-2	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Abschätzungen vs. exakte Wahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeit	**exakter Wert**	**Abschätzung**
$P(\lvert X\rvert < 2)$	0%	$\geq 1 - \frac{10}{4} = -\frac{3}{2} \geq 0$ (wertlos)
$P(\lvert X\rvert < 3)$	50%	$\geq 1 - \frac{10}{9} = -\frac{1}{9} \geq 0$ (wertlos)
$P(\lvert X\rvert < 4)$	50%	$\geq 1 - \frac{10}{16} = \frac{6}{16} = 37{,}5\%$
$P(\lvert X\rvert \geq 4)$	50%	$\leq \frac{10}{16} = 62{,}5\%$

Ungleichung von Tschebyscheff

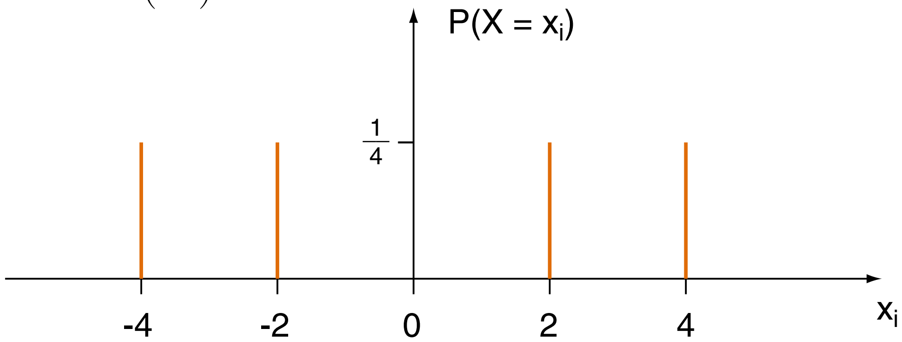
Güte der Abschätzung

Wie scharf sind die Abschätzungen der Tschebyscheff-Ungleichung?

Beispiel: Zufallsgröße X mit $E(X) = 0$ und Var$(X) = 10$.

- Gegeben die Verteilung von X:

x_i	-4	-2	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Abschätzungen vs. exakte Wahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeit	**exakter Wert**	**Abschätzung**
$P(\lvert X\rvert < 2)$	0%	$\geq 1 - \frac{10}{4} = -\frac{3}{2} \geq 0$ (wertlos)
$P(\lvert X\rvert < 3)$	50%	$\geq 1 - \frac{10}{9} = -\frac{1}{9} \geq 0$ (wertlos)
$P(\lvert X\rvert < 4)$	50%	$\geq 1 - \frac{10}{16} = \frac{6}{16} = 37{,}5\%$
$P(\lvert X\rvert \geq 4)$	50%	$\leq \frac{10}{16} = 62{,}5\%$
$P(\lvert X\rvert < 5)$	100%	$\geq 1 - \frac{10}{25} = \frac{15}{25} = 60\%$
$P(\lvert X\rvert \geq 5)$	0%	$\leq \frac{10}{25} = 40\%$

Bemerkungen:

- Die „Schärfe“ bezieht sich darauf, wie nahe der Schätzwert am tatsächlichen Wert liegt, je näher, desto schärfer die Abschätzung. Ein Abschätzung ist „scharf“, wenn in gewissen Fällen Gleichheit auftritt.

- Die Tschebyscheff-Ungleichung ist sehr allgemein (Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße genügt) und kann daher nicht besonders scharf sein.

Ungleichung von Tschebyscheff

Satz 2 (Tschebyscheff-Ungleichung für das arithmetische Mittel)
Das arithmetische Mittel $\bar{X}$ von n gleich verteilten Zufallsgrößen X_i mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ genügt für $c > 0$ der Ungleichung

$$P(|\bar{X} - \mu)| \geq c) \;\leq\; \frac{\sigma^2}{nc^2}\,.$$

Herleitung:

- Sei $\bar{X}$ das arithmetische Mittel n gleich verteilter Zufallsgrößen X_i.
- Anwendung der Tschebyscheff-Ungleichung auf $\bar{X}$:

$$P(|\bar{X} - E(\bar{X})| \geq c) \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}(\bar{X})}{c^2}$$

- Mit $\sqrt{n}$-Gesetz gilt $E(\bar{X}) = E(X_i) = \mu$ und $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\mathrm{Var}(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$.
- Es gilt daher:

$$P(|\bar{X} - \mu)| \geq c) \;\leq\; \frac{\sigma^2}{nc^2} \qquad \text{bzw.} \qquad P(|\bar{X} - \mu)| < c) \;\geq\; 1 - \frac{\sigma^2}{nc^2}\,.$$

Bemerkungen:

- Das $\sqrt{n}$-Gesetz besagt, dass bei steigender Zahl von Messungen X_i einer Größe das arithmetische Mittel $\bar{X}$ den Erwartungswert mit immer größerer Genauigkeit wiedergibt als eine Einzelmessung.
- Da n im Nenner des Quotienten $\frac{\sigma^2}{nc^2}$ steht, wird mit wachsendem n der Quotient der Tschebyscheff-Ungleichung für das arithmetische Mittel immer kleiner und beschreibt damit den Annäherungsprozess des $\sqrt{n}$-Gesetzes mit n.

Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: Wartungsvertrag

- Mit einem Wartungsvertrag verpflichtet sich ein Verkäufer eines Geräts, die im Jahr an zwei Bauteilen t_1 und t_2 darin auftretenden Schäden zu reparieren.

- Beide Bauteile fallen pro Jahr unabhängig mit je 10% Wahrscheinlichkeit aus.
  Vereinfachende Annahme: Einmal repariert, funktionieren sie den Rest des Jahres.

- Die Reparatur von t_1 kostet 100 Euro, die von t_2 200 Euro.

- X_i ($i \in \{1; 2\}$) kennzeichne die Reparaturkosten am Teil t_i; dann ergeben sich:

x_1	0	100
$P(X_1 = x_1)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$

x_2	0	200
$P(X_2 = x_2)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$

mit $E(X_1) = 10$ und Var$(X_1) = 900$ sowie $E(X_2) = 20$ und Var$(X_2) = 3600$.

Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: Wartungsvertrag

1. Wie teuer muss ein Wartungsvertrag mindestens sein, damit der Verkäufer keinen Verlust erwarten muss?

2. Was ist die Varianz der jährlichen Reparaturkosten für ein Gerät?

3. Wie viele Wartungsverträge müssen in etwa mindestens laufen, damit die anfallenden Reparaturkosten im Mittel mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit um weniger als 10 Euro von den erwarteten Wartungskosten abweichen?

Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: Wartungsvertrag

1. Wie teuer muss ein Wartungsvertrag mindestens sein, damit der Verkäufer keinen Verlust erwarten muss?

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 30$$

2. Was ist die Varianz der jährlichen Reparaturkosten für ein Gerät?

3. Wie viele Wartungsverträge müssen in etwa mindestens laufen, damit die anfallenden Reparaturkosten im Mittel mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit um weniger als 10 Euro von den erwarteten Wartungskosten abweichen?

Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: Wartungsvertrag

1. Wie teuer muss ein Wartungsvertrag mindestens sein, damit der Verkäufer keinen Verlust erwarten muss?

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 30$$

2. Was ist die Varianz der jährlichen Reparaturkosten für ein Gerät?

   Da X_1 und X_2 unabhängig sind ergibt sich

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = 4500\ .$$

3. Wie viele Wartungsverträge müssen in etwa mindestens laufen, damit die anfallenden Reparaturkosten im Mittel mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit um weniger als 10 Euro von den erwarteten Wartungskosten abweichen?

Ungleichung von Tschebyscheff

Beispiel: Wartungsvertrag

1. Wie teuer muss ein Wartungsvertrag mindestens sein, damit der Verkäufer keinen Verlust erwarten muss?

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 30$$

2. Was ist die Varianz der jährlichen Reparaturkosten für ein Gerät?

   Da X_1 und X_2 unabhängig sind ergibt sich

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = 4500 \ .$$

3. Wie viele Wartungsverträge müssen in etwa mindestens laufen, damit die anfallenden Reparaturkosten im Mittel mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit um weniger als 10 Euro von den erwarteten Wartungskosten abweichen?

$$P(|\bar{X} - 30| < 10) \geq 1 - \frac{4500}{n \cdot 10^2} = 1 - \frac{45}{n} \geq 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad n \geq 450$$