Kapitel PTS:IV

IV. Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Einführung und Definition
- Berechnung mit Baumdiagrammen
- Satz von Bayes
- Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse
- Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Einführung und Definition

Beispiel: Kommissionsvorsitz

- Eine Bildungskommission für Stochastik ist wie folgt zusammengesetzt:

Expertise	**Frauen**	**Männer**	$\sum$
Wahrscheinlichkeitstheorie	2	3	5
Statistik	6	4	10
$\sum$	8	7	15

- Der Kommissionsvorsitz soll per Losverfahren entschieden werden.
- Wie wahrscheinlich wird eine Frau Kommissionsvorsitzende?

Einführung und Definition

Beispiel: Kommissionsvorsitz

- Eine Bildungskommission für Stochastik ist wie folgt zusammengesetzt:

Expertise	**Frauen** B	**Männer** $\bar{B}$	$\sum$
Wahrscheinlichkeitstheorie	2	3	5
Statistik	6	4	10
$\sum$	8	7	15

- Der Kommissionsvorsitz soll per Losverfahren entschieden werden.
- Wie wahrscheinlich wird eine Frau Kommissionsvorsitzende? (Ereignis B)
- Mit $|\Omega| = 15$ gilt nach Anteilsregel $P(B) = \frac{8}{15}$

Einführung und Definition
Beispiel: Kommissionsvorsitz

- Eine Bildungskommission für Stochastik ist wie folgt zusammengesetzt:

Expertise		**Frauen** B	**Männer** $\bar{B}$	$\sum$
Wahrscheinlichkeitstheorie	A	2	3	5
Statistik	$\bar{A}$	6	4	10
$\sum$		8	7	15

- Der Kommissionsvorsitz soll per Losverfahren entschieden werden.
- Wie wahrscheinlich wird eine Frau Kommissionsvorsitzende? (Ereignis B)
- Mit $|\Omega| = 15$ gilt nach Anteilsregel $P(B) = \frac{8}{15}$
- Bekanntgabe: Jemand aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde gezogen.
- Ändert diese Information (Ereignis A) etwas an der Wahrscheinlichkeit für B?

Einführung und Definition

Beispiel: Kommissionsvorsitz

- Eine Bildungskommission für Stochastik ist wie folgt zusammengesetzt:

Expertise		**Frauen** B	**Männer** $\bar{B}$	$\sum$
Wahrscheinlichkeitstheorie	A	2	3	5
Statistik	$\bar{A}$	6	4	10
$\sum$		8	7	15

- Der Kommissionsvorsitz soll per Losverfahren entschieden werden.
- Wie wahrscheinlich wird eine Frau Kommissionsvorsitzende? (Ereignis B)
- Mit $|\Omega| = 15$ gilt nach Anteilsregel $P(B) = \frac{8}{15}$
- Bekanntgabe: Jemand aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde gezogen.
- Ändert diese Information (Ereignis A) etwas an der Wahrscheinlichkeit für B?

$$\frac{2}{5} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

- Das ist die Wahrscheinlichkeit für B, wenn man weiß, dass A eingetreten ist.

Einführung und Definition

Beispiel: Kommissionsvorsitz

- Eine Bildungskommission für Stochastik ist wie folgt zusammengesetzt:

Expertise		**Frauen** B	**Männer** $\bar{B}$	$\sum$
Wahrscheinlichkeitstheorie	A	2	3	5
Statistik	$\bar{A}$	6	4	10
$\sum$		8	7	15

- Der Kommissionsvorsitz soll per Losverfahren entschieden werden.
- Wie wahrscheinlich wird eine Frau Kommissionsvorsitzende? (Ereignis B)
- Mit $|\Omega| = 15$ gilt nach Anteilsregel $P(B) = \frac{8}{15}$
- Bekanntgabe: Jemand aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde gezogen.
- Ändert diese Information (Ereignis A) etwas an der Wahrscheinlichkeit für B?

$$\frac{2}{5} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{|A \cap B|}{|A|} \cdot \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \Big/ \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Das ist die Wahrscheinlichkeit für B, wenn man weiß, dass A eingetreten ist.
  Sie lässt sich auf die Wahrscheinlichkeiten von $A \cap B$ und A zurückführen.

Einführung und Definition

Definition 1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Seien A und B zwei Ereignisse im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit $P(A) > 0$. Dann heißt

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A.

Einführung und Definition

Definition 1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Seien A und B zwei Ereignisse im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit $P(A) > 0$. Dann heißt

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A.

Informationsgewinn:

- Oft ist $P(B|A) \neq P(B)$.
- Kenntnis über Ereignis A liefert Information über Ereignis B.
- Ist $P(B|A) > P(B)$ (bzw. $P(B|A) < P(B)$), liefert das Eintreten von A eine zusätzliche positive (bzw. negative) Information über das Eintreten von B.

Bemerkungen:

- Alternativ ist auch die Schreibweise $P_A(B)$ statt $P(B|A)$ gebräuchlich.
- $P(\cdot|A)$ bzw. P_A wird auch bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß bezüglich A genannt.
- Ist $A = \Omega$, so gilt $P(B|\Omega) = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(\Omega)} = P(B)$ für alle B. Man kann die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ also auch als bedingte Wahrscheinlichkeit bezüglich Ω auffassen.

Einführung und Definition

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Wurf eines fairen sechsseitigen Würfels.
- Ereignis: $B = \{1; 3; 6\}$
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für B, wenn man weiß, dass A_i eingetreten ist, aber nicht, welches konkrete Ergebnis aus A_i eingetreten ist?

- $A_1 = \{2; 4; 6\}$
- $P(A_1) = P(B) = \frac{1}{2}, \; P(A_1 \cap B) = \frac{1}{6}$

➜ $P(B|A_1) = \frac{1}{3} < P(B)$

Einführung und Definition
Beispiel: Würfeln

- Experiment: Wurf eines fairen sechsseitigen Würfels.
- Ereignis: $B = \{1; 3; 6\}$
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für B, wenn man weiß, dass A_i eingetreten ist, aber nicht, welches konkrete Ergebnis aus A_i eingetreten ist?

- $A_1 = \{2; 4; 6\}$
- $P(A_1) = P(B) = \frac{1}{2},\ \ P(A_1 \cap B) = \frac{1}{6}$

➜ $P(B|A_1) = \ \frac{1}{3}\ <\ P(B)$

- $A_2 = \{1; 2; 3; 5; 6\}$

➜ $P(B|A_2) = \ \frac{3}{5}\ >\ P(B)$

Einführung und Definition

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Wurf eines fairen sechsseitigen Würfels.
- Ereignis: $B = \{1; 3; 6\}$
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für B, wenn man weiß, dass A_i eingetreten ist, aber nicht, welches konkrete Ergebnis aus A_i eingetreten ist?

- $A_1 = \{2; 4; 6\}$
- $P(A_1) = P(B) = \frac{1}{2}, \; P(A_1 \cap B) = \frac{1}{6}$

→ $P(B|A_1) = \frac{1}{3} < P(B)$

- $A_2 = \{1; 2; 3; 5; 6\}$

→ $P(B|A_2) = \frac{3}{5} > P(B)$

- $A_3 = \{2; 6\}$

→ $P(B|A_3) = \frac{1}{2} = P(B)$

Einführung und Definition

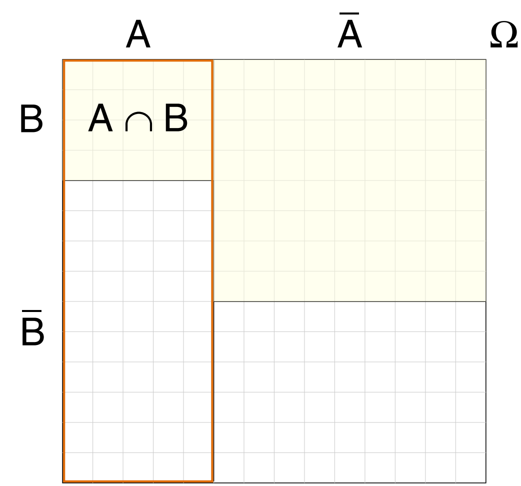
Bedingte Wahrscheinlichkeit im Flächenmodell

- Veranschaulichung im Flächenmodell
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen entsprechen ihrem Anteil an der Gesamtfläche.
- $P(B|A)$ entspricht dem Verhältnis der Flächen der Ereignisse $A \cap B$ und A.

Beispiel:

- Flächenmodell mit $14 \cdot 18 = 252$ Quadraten
- $P(A) = \frac{70}{252},\ P(B) = \frac{92}{252},\ P(A \cap B) = \frac{20}{252}$

➜ $P(B|A) = \frac{20}{70} = \frac{72}{252}\ <\ P(B)$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Einführung und Definition

Bedingte Wahrscheinlichkeit und die Vierfeldertafel

- Ereignisse A und B zerlegen Ω in vier paarweise unvereinbare Ereignisse: $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$
- Ihre Wahrscheinlichkeiten werden oft in Vierfeldertafeln notiert.
- Daraus lassen sich bedingte Wahrscheinlichkeiten bzgl. A und B ermitteln.

Beispiel: Rot-Grün-Sehschwäche

- A: „Rot-Grün-Sehschwäche" und B: „Männlich": [Wikipedia]

	A	$\bar{A}$	$\sum$
B	0,0463	0,4677	0,514
$\bar{B}$	0,0039	0,4821	0,486
$\sum$	0,0502	0,9498	1

➜ $P(B|A) = \frac{0{,}0463}{0{,}0502} \approx 0{,}92$

Einführung und Definition

Bedingte Wahrscheinlichkeit als Wahrscheinlichkeitsmaß

$P(B|A)$ erfüllt für variables B und festes A mit $P(A) > 0$ die Axiome von Kolmogorow:

- Axiom I: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$ (Nichtnegativität)
- Axiom II: $P(\Omega|A) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ (Normierung)
- Axiom III: Sei $B \cap C = \emptyset$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
P(B \cup C|A) &= \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} \\
&= \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(A)} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \\
&= P(B|A) + P(C|A)
\end{aligned}
$$

(Additivität)

$P(\cdot|A)$ bezeichnet man daher auch als bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß.

Mit P ist auch $P(\cdot|A)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Bemerkungen:

- An die Stelle von Ω für P tritt im Falle von $P(\cdot|A)$ das Ereignis A, weil die Bedingung gilt, dass A eingetreten ist. Da $P(A|A) = 1$ und $P(\bar{A}|A) = 0$, obwohl allgemein vermutlich $P(A) \neq 1$ und $P(\bar{A}) \neq 0$, kann in diesem Modell A als das *sichere* und $\bar{A}$ als das *unmögliche* Ereignis interpretiert werden.

- Da bedingte Wahrscheinlichkeiten die Axiome von Kolmogorow erfüllen, gelten alle Sätze entsprechend, die für „normale“ Wahrscheinlichkeiten gefolgert wurden:

$P(B) + P(\bar{B}) = 1$	$P(B|A) + P(\bar{B}|A) = 1$
$P(\emptyset) = 0$	$P(\emptyset|A) = 0$
$B \subseteq C \Rightarrow P(B) \leq P(C)$	$B \subseteq C \Rightarrow P(B|A) \leq P(C|A)$
$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$	$P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$
$P(B_1 \cup \ldots \cup B_m) = P(B_1) + \ldots + P(B_m)$ für paarweise unvereinbare B_i.	$P(B_1 \cup \ldots \cup B_m|A) = P(B_1|A) + \ldots + P(B_m|A)$ für paarweise unvereinbare B_i.

Einführung und Definition

Multiplikationsregel

- Aus $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ folgt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.
  Analog gilt: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
- Anwendungen berechnen selten $P(B|A)$, sondern $P(A \cap B)$.
- Hierfür werden Annahmen über $P(B|A)$ gemacht.

Einführung und Definition

Multiplikationsregel

- Aus $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ folgt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.
  Analog gilt: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
- Anwendungen berechnen selten $P(B|A)$, sondern $P(A \cap B)$.
- Hierfür werden Annahmen über $P(B|A)$ gemacht.

Beispiel: Kartenspiel

- Gegeben ein Kartenspiel mit 32 Karten.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nacheinander zwei Asse zu ziehen?

Einführung und Definition

Multiplikationsregel

- Aus $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ folgt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.
  Analog gilt: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
- Anwendungen berechnen selten $P(B|A)$, sondern $P(A \cap B)$.
- Hierfür werden Annahmen über $P(B|A)$ gemacht.

Beispiel: Kartenspiel

- Gegeben ein Kartenspiel mit 32 Karten.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nacheinander zwei Asse zu ziehen?
- $A_1 =$ „Ass im ersten Zug“, $A_2 =$ „Ass im zweiten Zug“: gesucht ist $P(A_1 \cap A_2)$
- $P(A_1) = \frac{4}{32}$ und $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$
- $P(A_2|A_1)$ ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Zug ein Ass zu ziehen, wenn beim ersten eins gezogen wurde. Mit Laplace-Annahme: $P(A_2|A_1) = \frac{3}{31}$.

➜ $P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \approx 1{,}2\%$.

Bemerkung:

- Die kombinatorische Lösung $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31}$ liefert das gleiche Ergebnis.

Einführung und Definition

Satz 2 (Multiplikationsregel)

Seien A, B und C drei Ereignisse im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit $P(A \cap B) > 0$. Dann gilt die Multiplikationsregel

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \ .$$

Verallgemeinert auf n Ereignisse:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \prod_{k=2}^{n} P\left(A_k | \cap_{j=1}^{k-1} A_j\right)$$

Bemerkung:

- Es genügt, $P(A \cap B) > 0$ zu fordern. Wegen des Monotoniegesetzes ist auch $P(A) \geq P(A \cap B) > 0$.
- Da A, B und C bei paarweiser Vereinbarkeit vertauschbar sind, können zwei weitere Varianten angegeben werden, die jeweils mit $P(B)$ oder $P(C)$ beginnen.

Einführung und Definition

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was ist die Wahrscheinlichkeit für „Sechs Richtige“ beim Lotto „6 aus 49“?
- Teilereignisse:
  - A_1: „Erste gezogene Zahl ist eine der angekreuzten“
  - A_2: „Zweite gezogene Zahl ist eine der angekreuzten“
  - usw.

Einführung und Definition

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was ist die Wahrscheinlichkeit für „Sechs Richtige“ beim Lotto „6 aus 49“?
- Teilereignisse:
  - A_1: „Erste gezogene Zahl ist eine der angekreuzten“
  - A_2: „Zweite gezogene Zahl ist eine der angekreuzten“
  - usw.
- Gesucht:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6) &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\
&\quad \cdot \ldots \cdot P(A_6 | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_5) \\
&= \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{13.983.816}
\end{aligned}
$$

- Die Mächtigkeiten der einzelnen Ereignisse sind ohne Kombinatorik leicht überschaubar.

Berechnung mit Baumdiagrammen

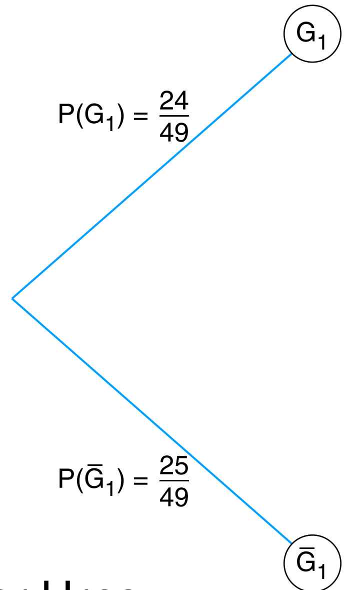
Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Zahlen gerade sind?

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Zahlen gerade sind?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade“



Baumdiagramm:

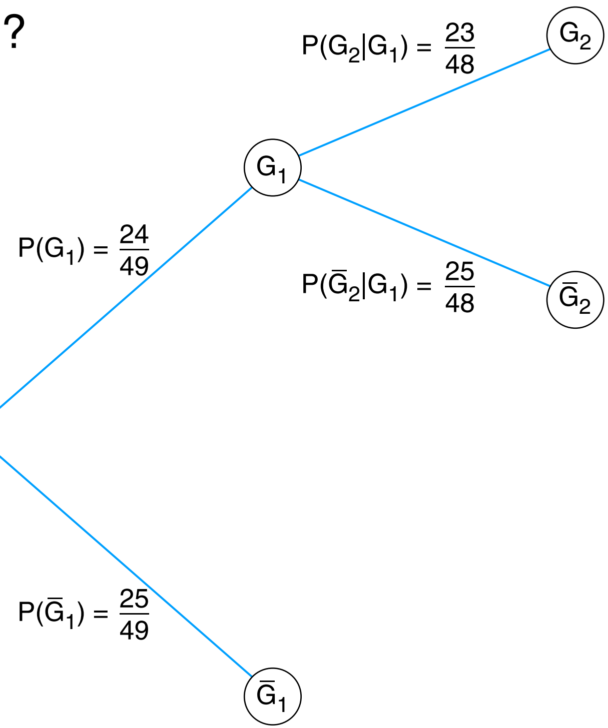
- Wurzel: Ausgangszustand der Urne
- Knoten: Ereignis, das den Zustand der Urne verändert
- Kante: mögliches Elementarereignis der nächsten Ziehung
- Kantenbeschriftung: (bedingte) Wahrscheinlichkeit

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Zahlen gerade sind?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade“
  - G_2: „Zweite Zahl gerade“

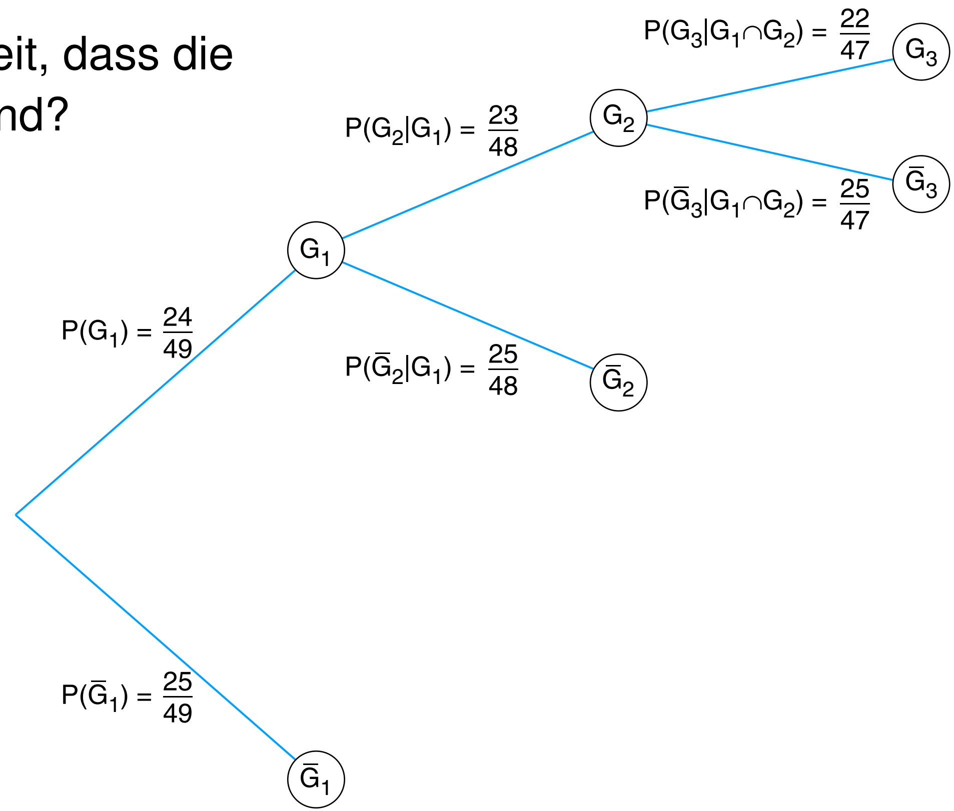


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49"

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Zahlen gerade sind?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade"
  - G_2: „Zweite Zahl gerade"
  - G_3: „Dritte Zahl gerade"

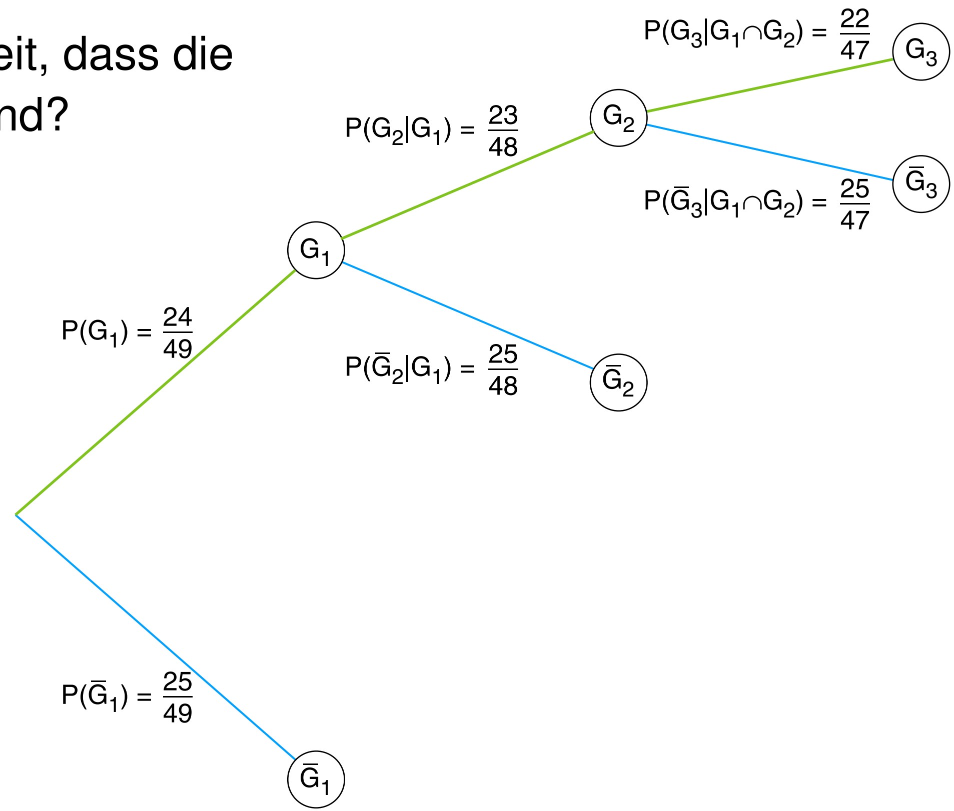


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Zahlen gerade sind?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade“
  - G_2: „Zweite Zahl gerade“
  - G_3: „Dritte Zahl gerade“



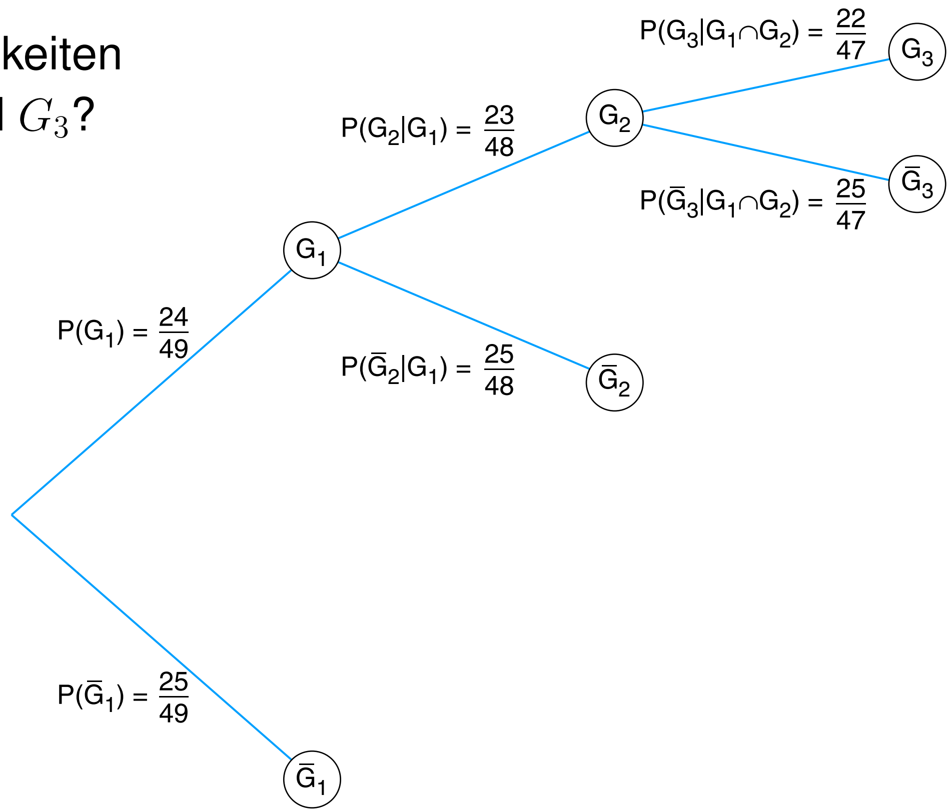
➜ $$P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) \;=\; P(G_1) \cdot P(G_2|G_1) \cdot P(G_3|G_1 \cap G_2) \;=\; \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} \cdot \frac{22}{47} \;\approx\; 0{,}11$$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse G_1, G_2 und G_3?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade“
  - G_2: „Zweite Zahl gerade“
  - G_3: „Dritte Zahl gerade“

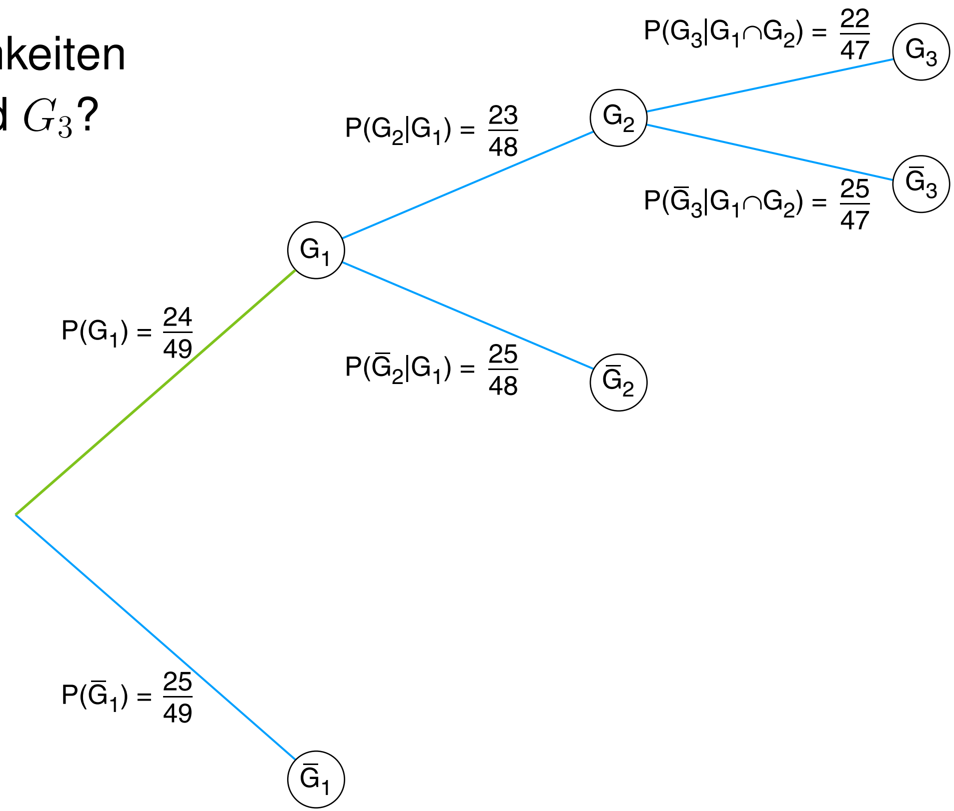


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse G_1, G_2 und G_3?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade“
  - G_2: „Zweite Zahl gerade“
  - G_3: „Dritte Zahl gerade“



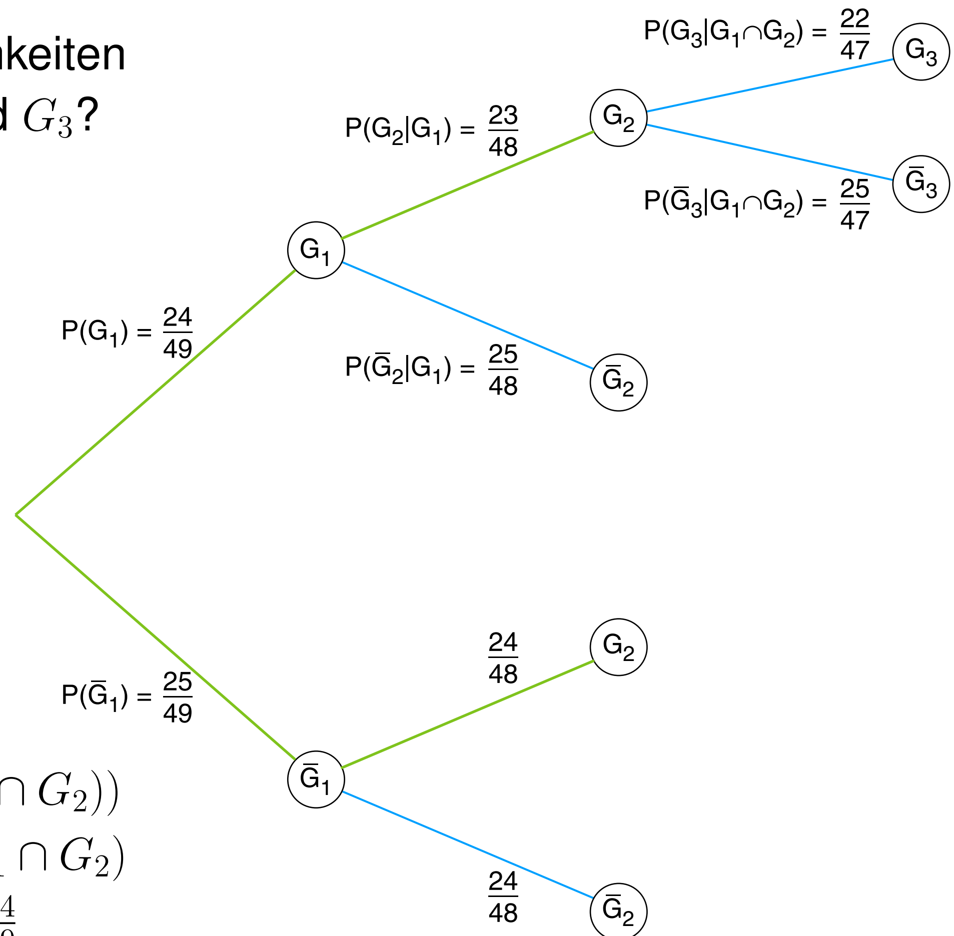
- $P(G_1) \; = \; \frac{24}{49}$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse G_1, G_2 und G_3?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade“
  - G_2: „Zweite Zahl gerade“
  - G_3: „Dritte Zahl gerade“



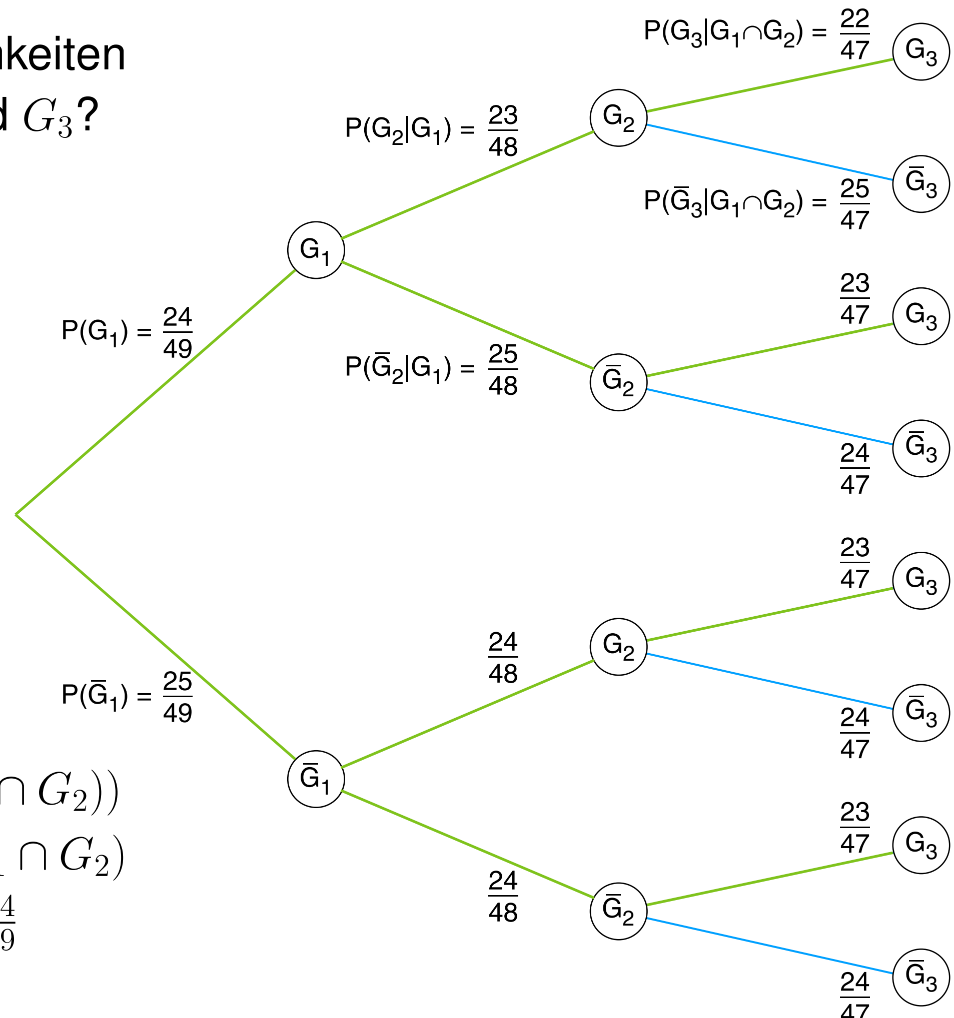
- $$P(G_1) = \frac{24}{49}$$
- $$\begin{aligned} P(G_2) &= P((G_1 \cap G_2) \cup (\bar{G}_1 \cap G_2)) \\ &= P(G_1 \cap G_2) + P(\bar{G}_1 \cap G_2) \\ &= \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} + \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} = \frac{24}{49} \end{aligned}$$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse G_1, G_2 und G_3?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade“
  - G_2: „Zweite Zahl gerade“
  - G_3: „Dritte Zahl gerade“



- $P(G_1) \;=\; \frac{24}{49}$

- $$\begin{aligned} P(G_2) &= P((G_1 \cap G_2) \cup (\bar{G}_1 \cap G_2)) \\ &= P(G_1 \cap G_2) + P(\bar{G}_1 \cap G_2) \\ &= \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} + \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} \;=\; \frac{24}{49} \end{aligned}$$

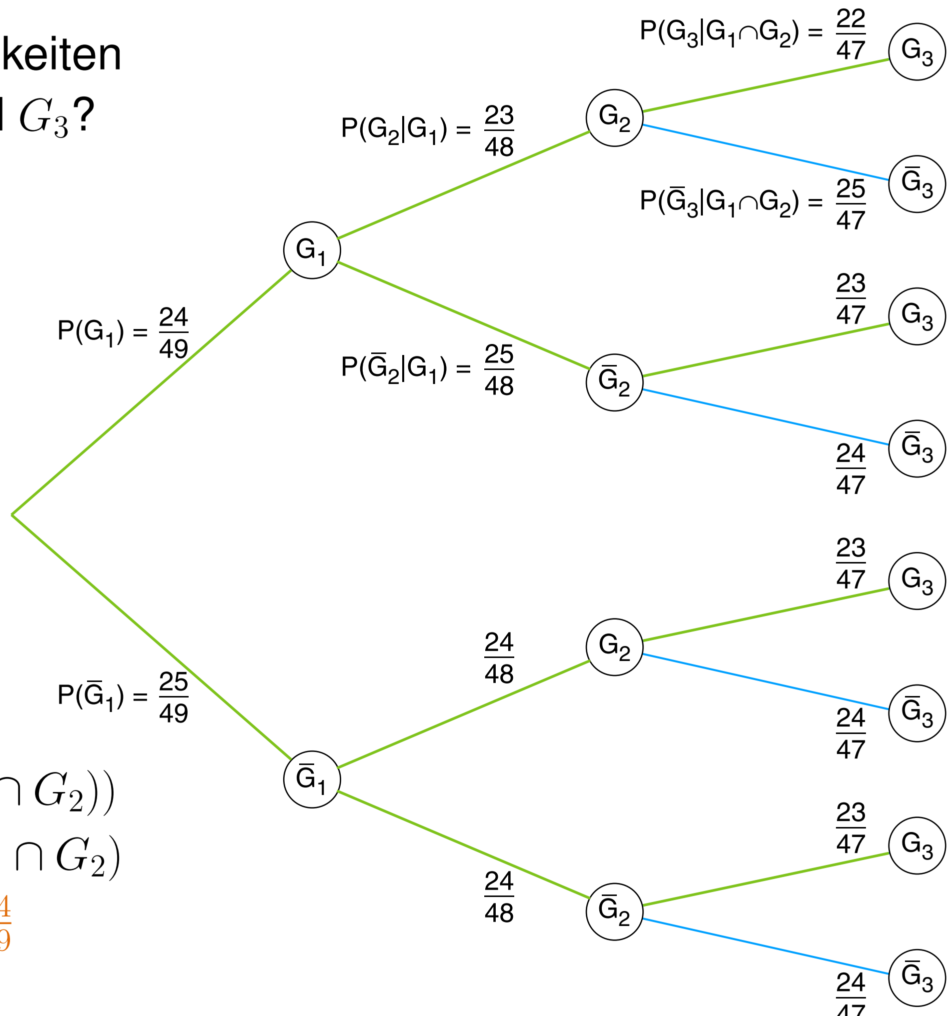
- $P(G_3) \;=\; \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} \cdot \frac{22}{47} + \frac{24}{49} \cdot \frac{25}{48} \cdot \frac{23}{47} + \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} \cdot \frac{23}{47} + \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} \cdot \frac{24}{47} \;=\; \frac{24}{49}$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Was sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse G_1, G_2 und G_3?
- Ereignisse:
  - G_1: „Erste Zahl gerade“
  - G_2: „Zweite Zahl gerade“
  - G_3: „Dritte Zahl gerade“



- $P(G_1) \;=\; \frac{24}{49}$
- $$\begin{aligned} P(G_2) &= P((G_1 \cap G_2) \cup (\bar{G}_1 \cap G_2)) \\ &= P(G_1 \cap G_2) + P(\bar{G}_1 \cap G_2) \\ &= \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} + \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} \;=\; \frac{24}{49} \end{aligned}$$
- $P(G_3) \;=\; \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} \cdot \frac{22}{47} + \frac{24}{49} \cdot \frac{25}{48} \cdot \frac{23}{47} + \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} \cdot \frac{23}{47} + \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} \cdot \frac{24}{47} \;=\; \frac{24}{49}$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Es überrascht vielleicht, dass $P(G_1) = P(G_2) = P(G_3)$, wenn man bedenkt, dass die Wahrscheinlichkeit einer geraden Zahl von den vorher gezogenen Zahlen abhängt. Vergleiche auch das Beispiel Lotto „6 aus 49“, das den Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell beim axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriff illustriert.

Berechnung mit Baumdiagrammen

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsexperimente

Verzweigungsregel:

> Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an Zweigen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist 1.

Berechnung mit Baumdiagrammen

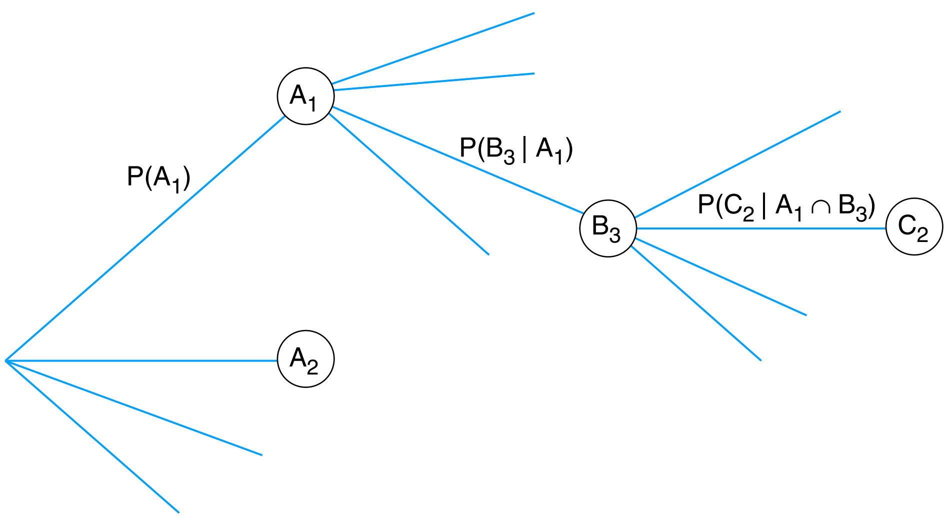
Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsexperimente

Verzweigungsregel:

> Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an Zweigen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist 1.

Erste Pfadregel:

> Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment im zugehörigen Baumdiagramm ein bestimmter Pfad durchlaufen wird, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.



$$P(C_2) = P(A_1) \cdot P(B_3 \mid A_1) \cdot P(C_2 \mid A_1 \cap B_3)$$

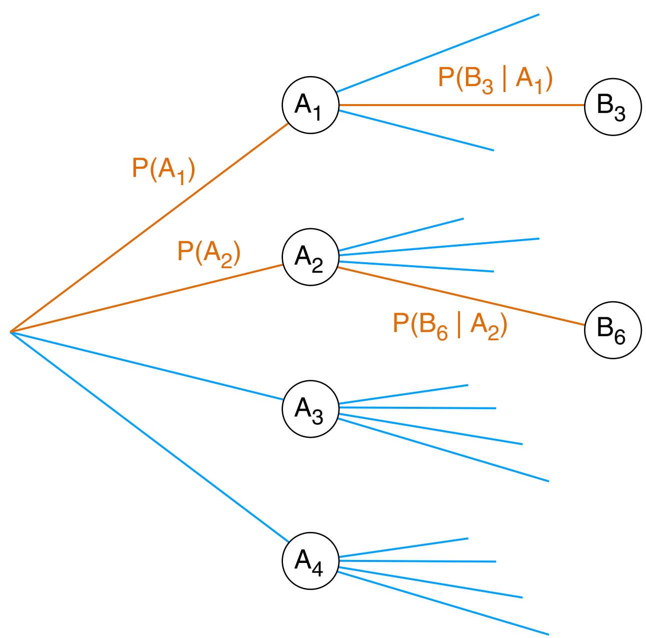
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Berechnung mit Baumdiagrammen

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsexperimente

Zweite Pfadregel:

> Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die im zugehörigen Baumdiagramm zu dem Ereignis führen.



$$\begin{aligned} & P(B_3 \cup B_6) \\ = \; & P(A_1 \cap B_3) + P(A_2 \cap B_6) \\ = \; & P(A_1) \cdot P(B_3 \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B_6 \mid A_2) \end{aligned}$$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]