Kapitel PTS:II

II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisräume
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ereignisräume

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

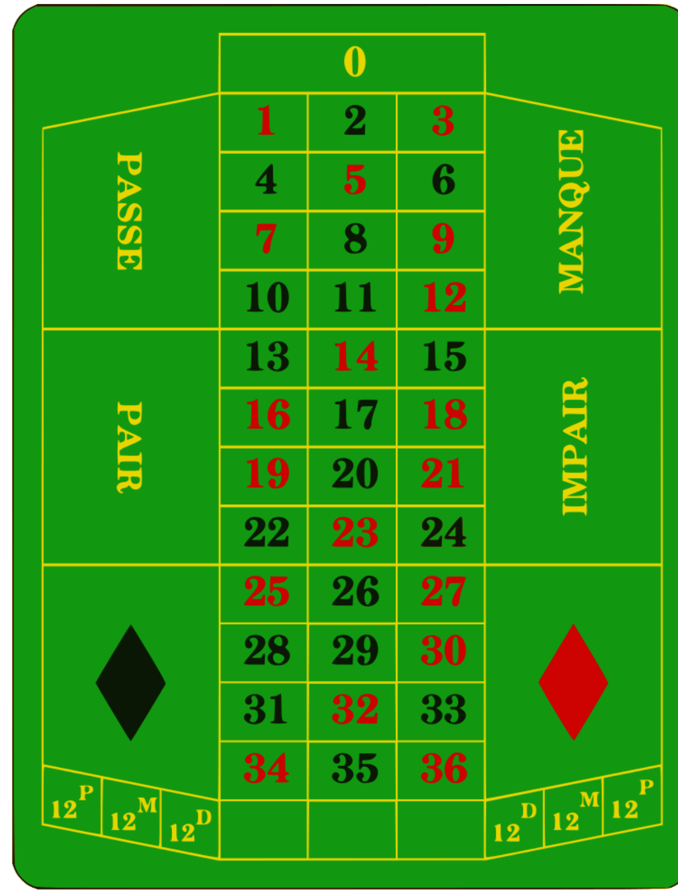
Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

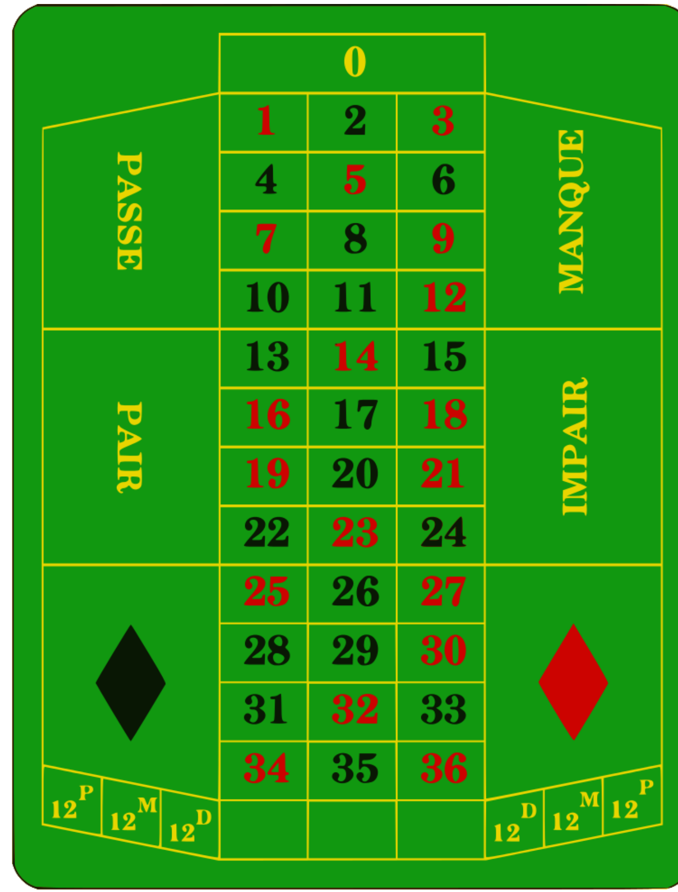
Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette



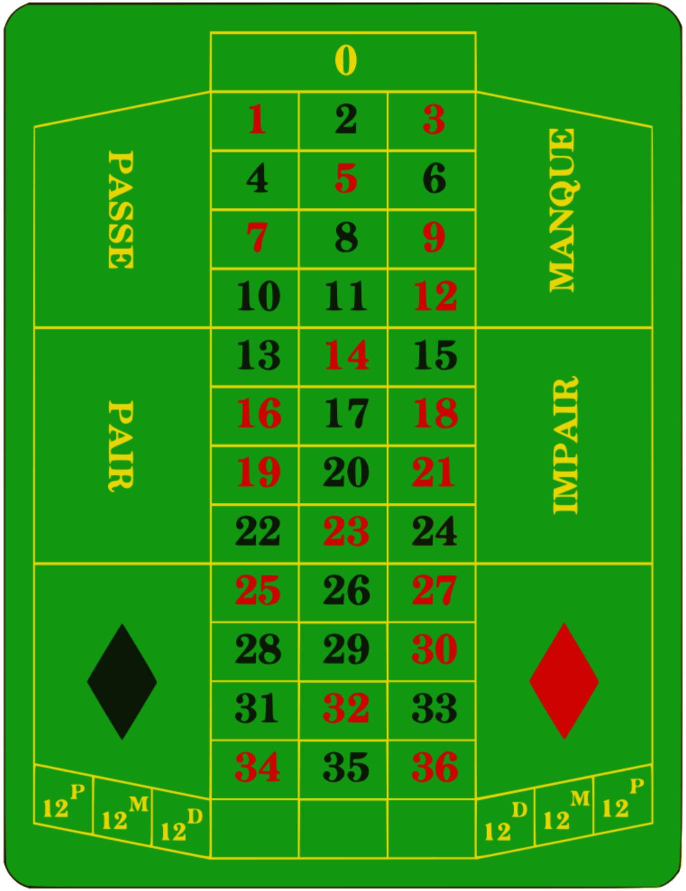
Verallgemeinert:

- Aufbau: Urne mit 37 nummerierten Kugeln.
- Experiment: Ziehung einer Kugel.
- Ergebnisraum: $\Omega = \{0; 1; \ldots; 36\}$
- Glücksspiel: Wette über das Ergebnis.

Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

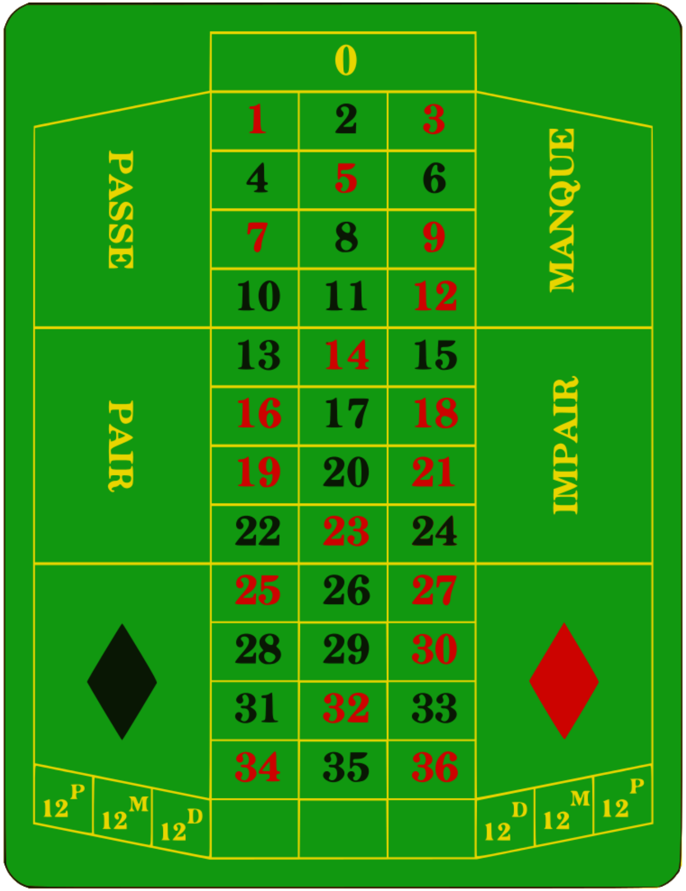
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz$\times 36$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

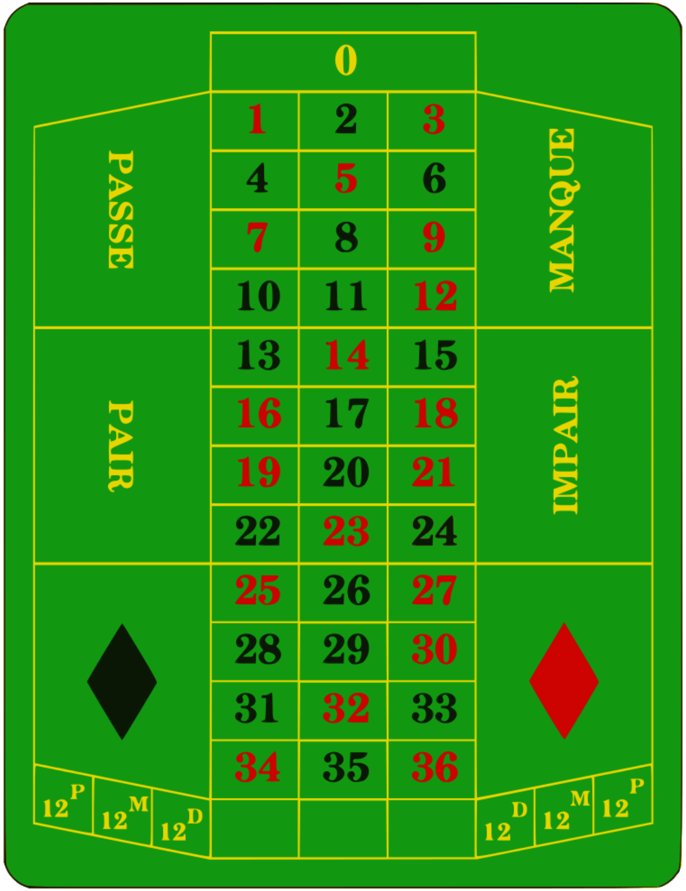
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz$\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7;8\}$	$\times 18$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

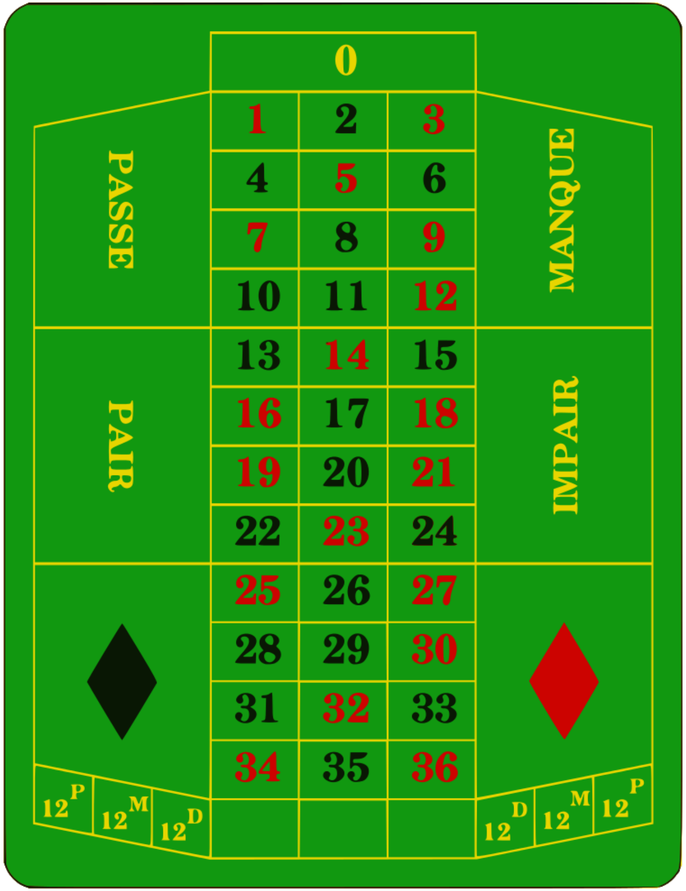
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz$\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \ldots; 18\}$	$\times 6$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

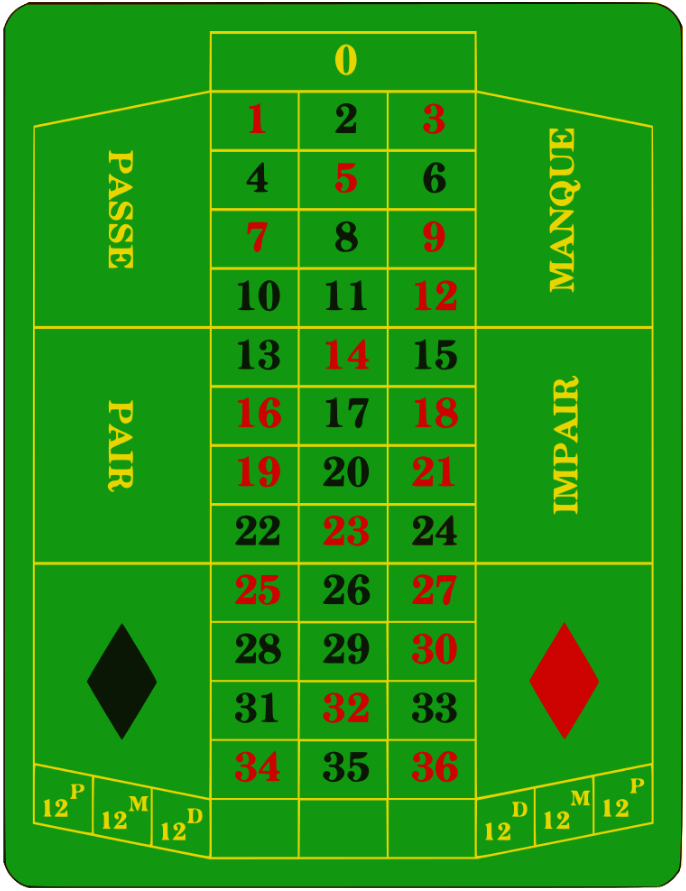
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz$\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \ldots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \ldots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \ldots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \ldots; 36\}$	$\times 3$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \ldots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \ldots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \ldots; 36\}$	$\times 3$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

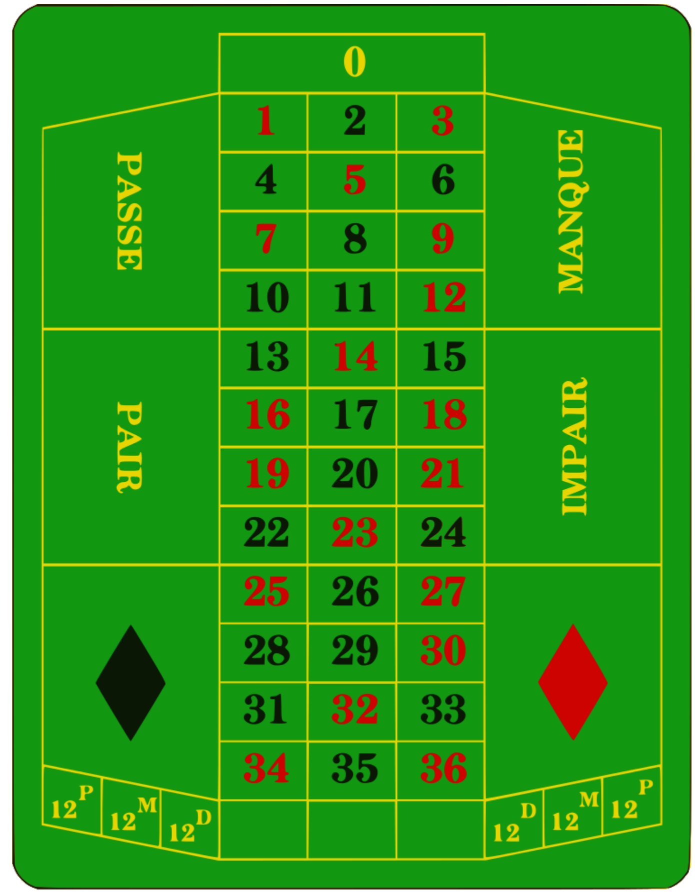
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz$\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \ldots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \ldots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \ldots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \ldots; 36\}$	$\times 3$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \ldots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \ldots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \ldots; 36\}$	$\times 3$
pair	gerade	$\{2; 4; \ldots; 36\}$	$\times 2$
impair	ungerade	$\{1; 3; \ldots; 35\}$	$\times 2$
rouge	rote	$\{1; 3; \ldots; 36\}$	$\times 2$
noir	schwarze	$\{2; 4; \ldots; 35\}$	$\times 2$
manque	erste Hälfte	$\{1; \ldots; 18\}$	$\times 2$
passe	zweite Hälfte	$\{19; \ldots; 36\}$	$\times 2$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz$\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \ldots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \ldots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \ldots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \ldots; 36\}$	$\times 3$
- double	zwei Dutzend	$\{1; \ldots; 24\}$	$\times 1{,}5$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \ldots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \ldots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \ldots; 36\}$	$\times 3$
- double	zwei Reihen	$\{1; 2; 4; \ldots; 35\}$	$\times 1{,}5$
pair	gerade	$\{2; 4; \ldots; 36\}$	$\times 2$
impair	ungerade	$\{1; 3; \ldots; 35\}$	$\times 2$
rouge	rote	$\{1; 3; \ldots; 36\}$	$\times 2$
noir	schwarze	$\{2; 4; \ldots; 35\}$	$\times 2$
manque	erste Hälfte	$\{1; \ldots; 18\}$	$\times 2$
passe	zweite Hälfte	$\{19; \ldots; 36\}$	$\times 2$



Bemerkungen:

- Roulettespieler haben verschiedene Setzmöglichkeiten, die sich als Teilmengen des Ergebnisraums Ω beschreiben lassen und die im Erfolgsfall unterschiedliche Auszahlungsquoten erzielen.

- Für Roulettespieler interessante Spielereignisse sind also bestimmte Teilmengen des Ergebnisraums.

- Setzt beispielsweise jemand auf „douzaine premiers“ und wird eine 9 ermittelt, so sagt man, das Ereignis „douzaine premiers“ ist eingetreten.

- Es gibt oft verschiedene Sonderregelungen für das Ergebnis 0; dieses Ergebnis ist aus den meisten Ereignissen ausgeschlossen.

- Der Gewinn wird abhängig vom eingetretenen Ereignis als Vielfaches des Einsatzes ermittelt. Der maximale Gewinn ist das 36fache des Einsatzes. Beachten Sie, dass dies nicht der Mächtigkeit des Ergebnisraums entspricht.

Ereignisräume

Definition 4 (Ereignisraum)

Jede Teilmenge A eines Ergebnisraums Ω heißt Ereignis. Das Ereignis A tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis ω vorliegt, dass in A enthalten ist.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

Ereignisräume

Definition 4 (Ereignisraum)

Jede Teilmenge A eines Ergebnisraums Ω heißt Ereignis. Das Ereignis A tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis ω vorliegt, dass in A enthalten ist.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

Besondere Ereignisse:

- Das unmögliche Ereignis $\emptyset$ enthält kein Ergebnis $\omega \in \Omega$. Es tritt niemals ein.
- Das sichere Ereignis Ω enthält alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$. Es tritt immer ein.
- Das Ereignis $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, heißt Elementarereignis.
  Achtung: Elementarereignis $\{\omega\} \neq$ Ergebnis ω

Mächtigkeit:

- Ist $|\Omega| = m$, so ist $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^m$.

Bemerkungen:

- Wir haben einem Begriff der Umgangssprache einen mathematischen Begriff zugeordnet: „Ereignis“ $\mapsto$ Menge.

Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 1:

- Ein Chip auf „manque“ (erste Hälfte)
- Verlust, wenn „passe“ eintritt

→ Komplementärmenge

Spiel 2:

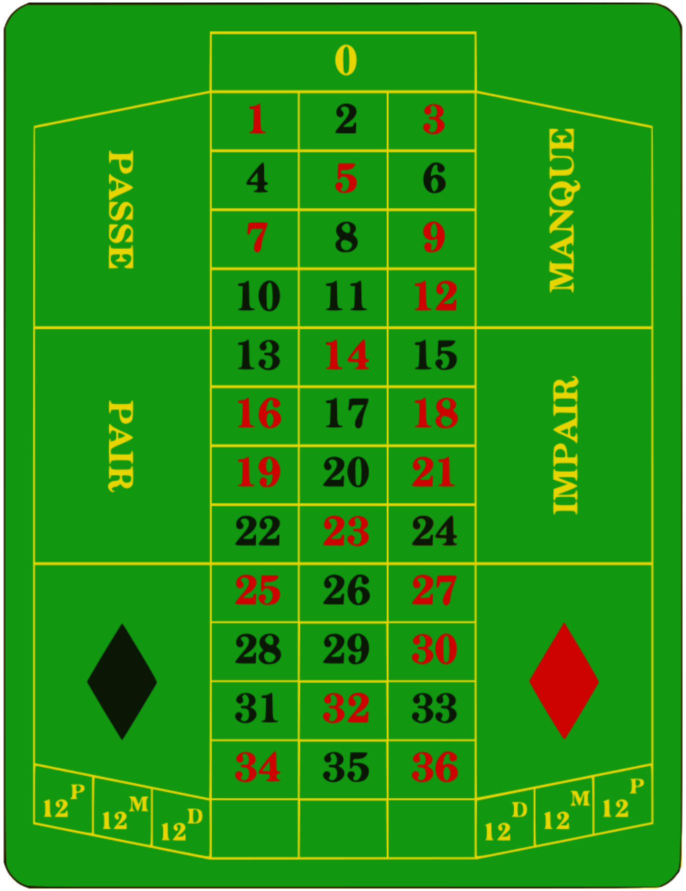
- Ein Chip auf „manque“, einer auf $\{1; 2; 3\}$
- Gewinn wird maximal, wenn $\{1; 2; 3\}$ eintritt

→ Teilmenge

Spiel 3:

- Ein Chip auf „pair“, einer auf $\{1; 2; 3\}$
- Gewinn wird maximal, wenn $\{2\}$ eintritt

→ Schnittmenge



Ereignisräume

Definition 5 (Gegenereignis, Teilereignis, Gleichheit)

Das Ereignis $\bar{A}$ tritt immer genau dann ein, wenn A nicht eintritt und heißt Gegenereignis zu A oder kurz *nicht*-A.

Ist A eine Teilmenge von B (in Zeichen: $A \subseteq B$), so tritt mit dem Ereignis A stets auch das Ereignis B ein: A *zieht* dann B *nach sich* und heißt Teilereignis von B.

Zwei Ereignisse A und B heißen gleich, wenn A ein Teilereignis von B und B ein Teilereignis von A ist:

$$A = B \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$

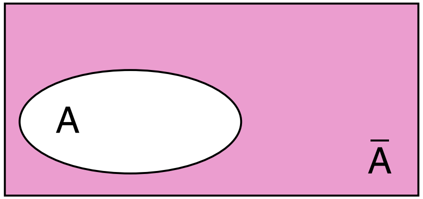
Bemerkungen:

- „Umgangssprachliche“ Setzmöglichkeiten des Roulette lassen sich als Mengenverknüpfungen von Ereignissen ausdrücken.
- Zur Veranschaulichung werden oft Venn-Diagramme verwandt – John Venn (1834–1923) war ein englischer Naturphilosoph.
- In einem Venn-Diagramm (siehe folgende Folien) umfasst eine geschlossene Kurve (Kreis, Ellipse, Viereck, etc.) die Elemente einer Menge, die man als Punkte in der Ebene auffassen kann.

Ereignisräume

Verknüpfung von Ereignissen

$\overline{A}$

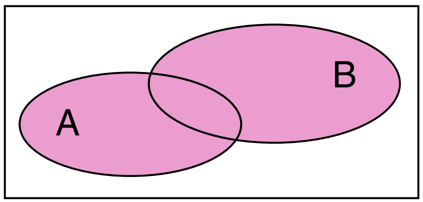


Ω

nicht-A / Gegenereignis

tritt ein, wenn A nicht eintritt

$A \cup B$

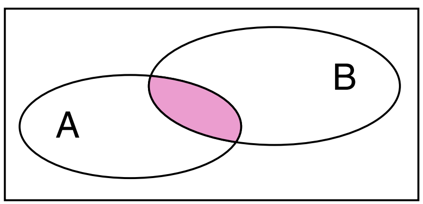


Ω

A oder B

tritt ein, wenn A oder auch B eintritt

$A \cap B$

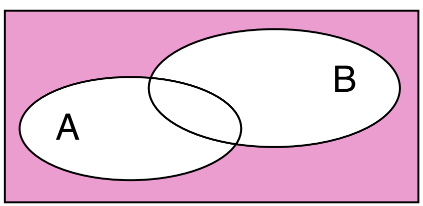


Ω

A und B

tritt ein, wenn A und zugleich B eintritt

$\overline{A} \cap \overline{B}$

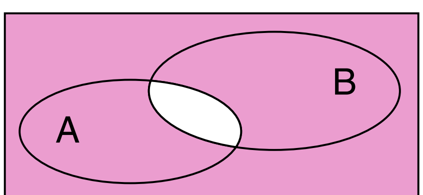


Ω

nicht-A und nicht-B (= $\overline{A \cup B}$)

tritt ein, wenn weder A noch B eintritt

$\overline{A} \cup \overline{B}$



Ω

nicht-A oder nicht-B (= $\overline{A \cap B}$)

tritt ein, wenn höchstens eines der beiden Ereignisse A und B eintritt

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Die Operationen $\cup$ und $\cap$ sind auf mehrere Ereignisse verallgemeinerbar:
  - Ereignis $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse A_i eintritt
  - Ereignis $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$ tritt ein, wenn alle Ereignisse A_i eintreten

- Wiederholgung Mengenalgebra
  - Kommutativgesetze $$A \cup B = B \cup A$$ $$A \cap B = B \cap A$$
  - Assoziativgesetze $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$ $$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
  - Distributivgesetze $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$ $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
  - Neutrale Elemente $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \Omega = A$
  - Dominante Elemente $A \cup \Omega = \Omega$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - Komplementäre Elemente $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$
  - Idempotenzgesetze $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$
  - Absorptionsgesetze $$A \cup (A \cap B) = A$$ $$A \cap (A \cup B) = A$$
  - Gesetze von de Morgan $$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$ $$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 4:

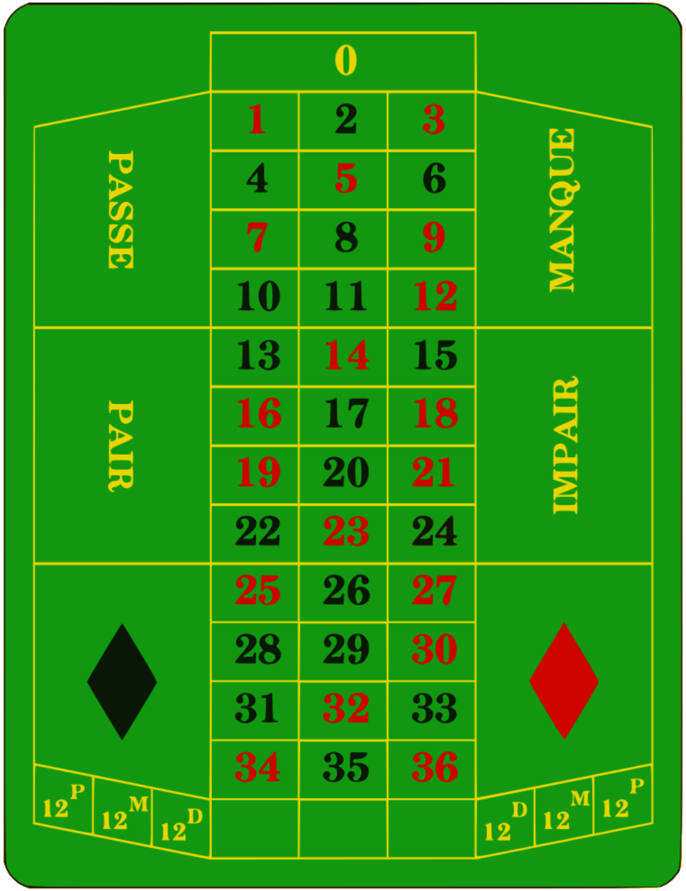
- Ein Chip auf „douzaine premier“
- Ein Chip auf „douzaine dernier“
- Es können nicht beide Ereignisse eintreten

→ Leere Schnittemenge
Unmögliches Ereignis

Spiel 5:

- Je ein Chip auf $\{1;2;3\}$, $\{4;5;6\}$, $\{7;8;9\}$, und $\{10;11;12\}$
- Gewinn, wenn „douzaine premier“ eintritt
$\{1;...;12\} = \{1;2;3\} \cup \{4;5;6\} \cup \{7;8;9\} \cup \{10;11;12\}$;
Gewinn äquivalent zu 4 Chips auf dieses Ereignis.

→ Zerlegung in disjunkte Teilereignisse



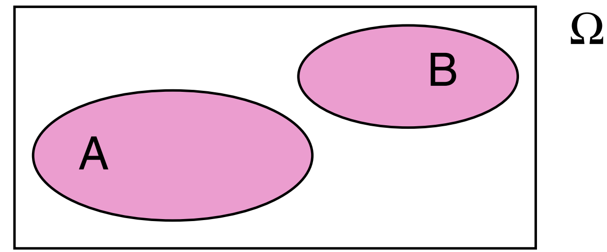
Ereignisräume

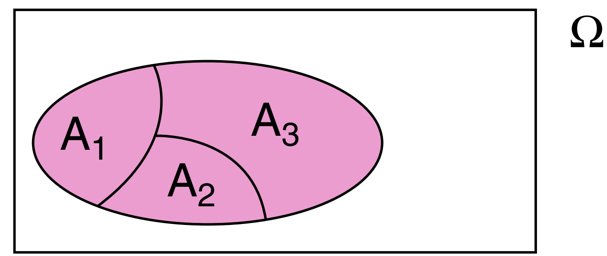
Definition 6 (unvereinbar, vereinbar, Zerlegung)

Zwei Ereignisse A und B mit $A \cap B = \emptyset$ heißen unvereinbar (ansonsten vereinbar).

Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m \geq 2)$ heißen paarweise unvereinbar, wenn jeweils zwei von ihnen unvereinbar sind.

Eine Menge paarweise unvereinbarer Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ mit $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ heißt Zerlegung von A in die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$.





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Mehr als zwei Ereignisse heißen vollständig unvereinbar, wenn sie nicht alle zugleich eintreten können.