

# Kapitel PTS:II

## II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- ❑ Zufallsexperimente
- ❑ Ergebnisräume
- ❑ Ereignisräume
- ❑ Relative Häufigkeit
- ❑ Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- ❑ Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

# Ereignisräume

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum  $\Omega$

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit  $\rightarrow$  Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette



A green roulette betting layout table with yellow borders. The table is divided into several sections:

- Top Row:** A single column labeled '0'.
- Second Row:** Three columns labeled '1', '2', and '3'.
- Third Row:** Three columns labeled '4', '5', and '6'.
- Fourth Row:** Three columns labeled '7', '8', and '9'.
- Fifth Row:** Three columns labeled '10', '11', and '12'.
- Sixth Row:** Three columns labeled '13', '14', and '15'.
- Seventh Row:** Three columns labeled '16', '17', and '18'.
- Eighth Row:** Three columns labeled '19', '20', and '21'.
- Ninth Row:** Three columns labeled '22', '23', and '24'.
- Tenth Row:** Three columns labeled '25', '26', and '27'.
- Eleventh Row:** Three columns labeled '28', '29', and '30'.
- Twelfth Row:** Three columns labeled '31', '32', and '33'.
- Thirteenth Row:** Three columns labeled '34', '35', and '36'.
- Bottom Row:** Three columns labeled '12<sup>P</sup>', '12<sup>M</sup>', and '12<sup>D</sup>'.

Additional labels and symbols:

- Left Side:** The word 'PASSE' is written vertically in yellow on the left side of the table.
- Right Side:** The word 'MANQUE' is written vertically in yellow on the right side of the table.
- Bottom Left:** A black diamond symbol is located at the bottom left of the table.
- Bottom Right:** A red diamond symbol is located at the bottom right of the table.

# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette



Verallgemeinert:

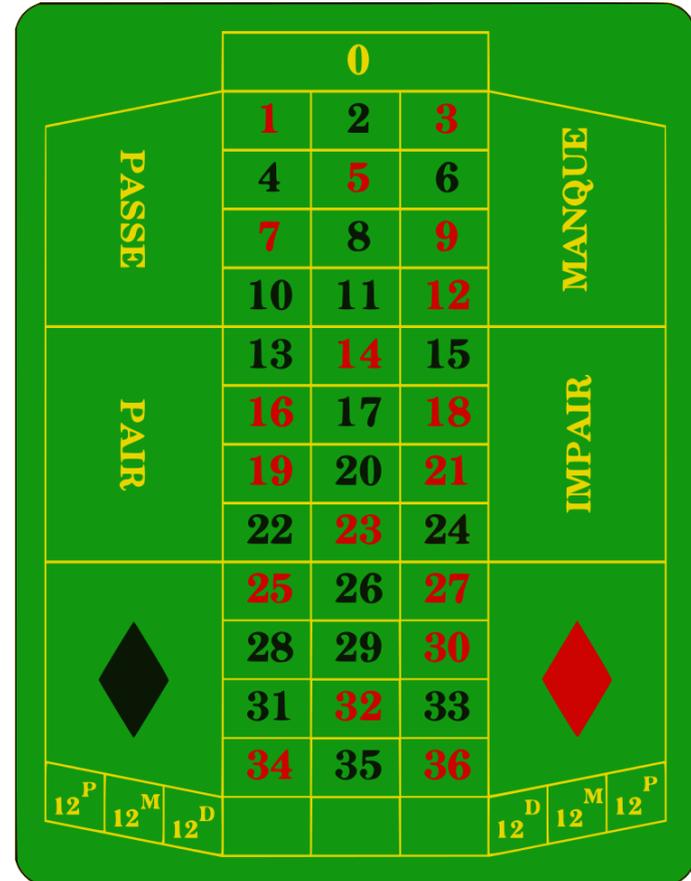
- Aufbau: Urne mit 37 nummerierten Kugeln.
- Experiment: Ziehung einer Kugel.
- Ergebnisraum:  $\Omega = \{0; 1; \dots; 36\}$
- Glücksspiel: Wette über das Ergebnis.

A diagram of a roulette betting layout on a green background. The numbers 0 through 36 are arranged in a grid. The number 0 is at the top center. Numbers 1-3 are to its left, 4-6 to its right, 7-9 to the left of 10-12, 13-15 to the left of 16-18, 19-21 to the left of 22-24, 25-27 to the left of 28-30, and 31-33 to the left of 34-36. The numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, and 36 are in black, while 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, and 36 are in red. The words PASSE and MANQUE are written vertically on the left and right sides of the top section. The words PAIR and IMPAIR are written vertically on the left and right sides of the middle section. A black diamond is on the left and a red diamond is on the right of the bottom section. At the bottom, there are three columns of betting options: 12<sup>P</sup>, 12<sup>M</sup>, 12<sup>D</sup> on the left; 12<sup>D</sup>, 12<sup>M</sup>, 12<sup>P</sup> on the right.

# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

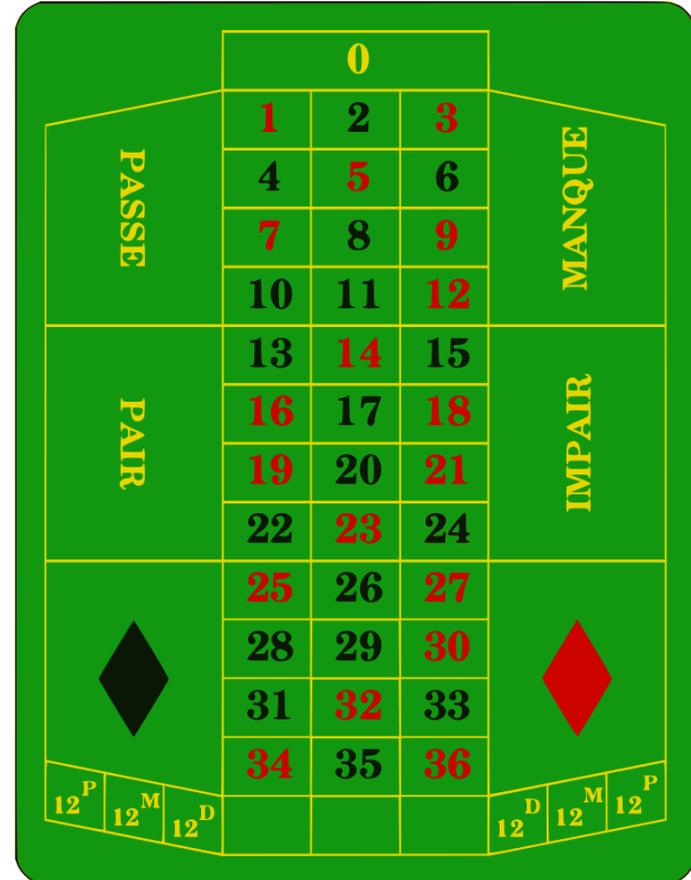
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$



# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

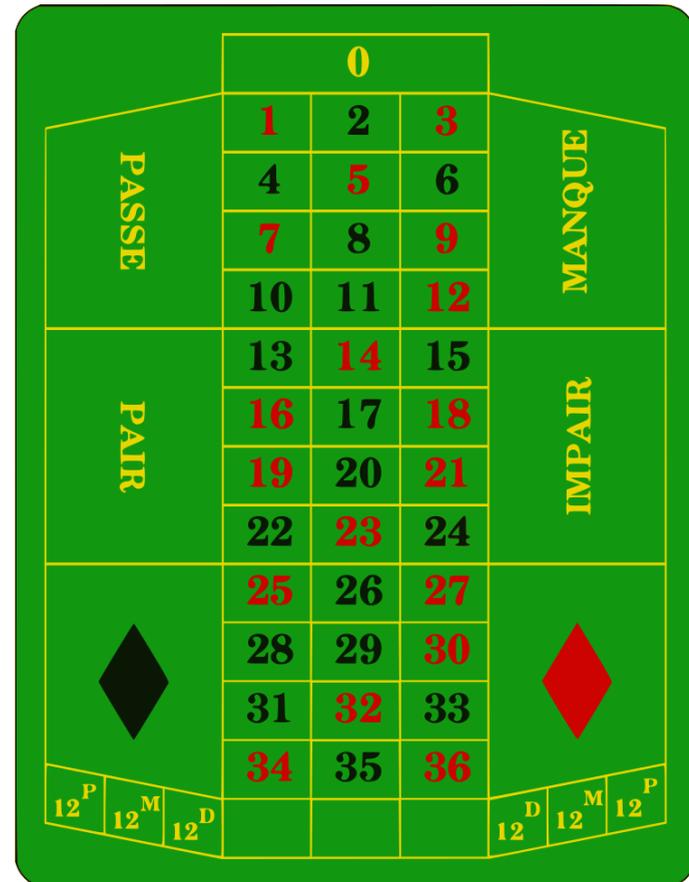
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$



# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

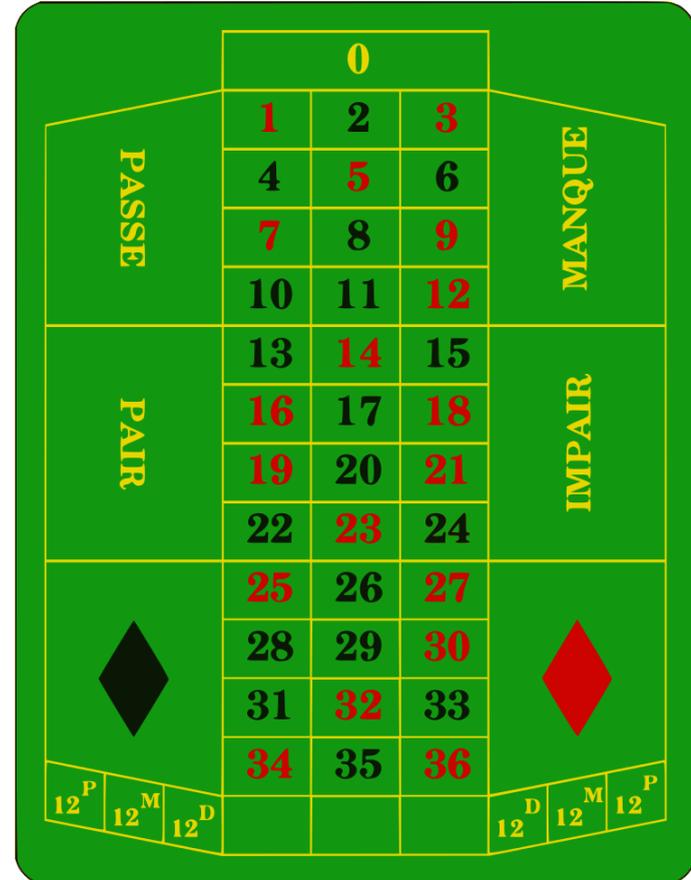
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \dots; 18\}$	$\times 6$



# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

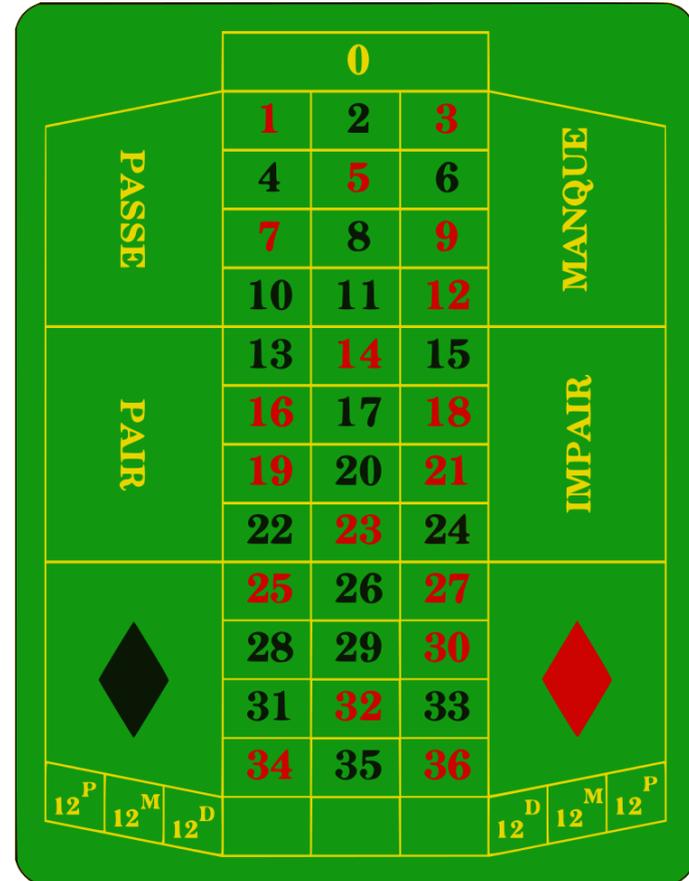
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \dots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \dots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \dots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \dots; 36\}$	$\times 3$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \dots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \dots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \dots; 36\}$	$\times 3$



# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

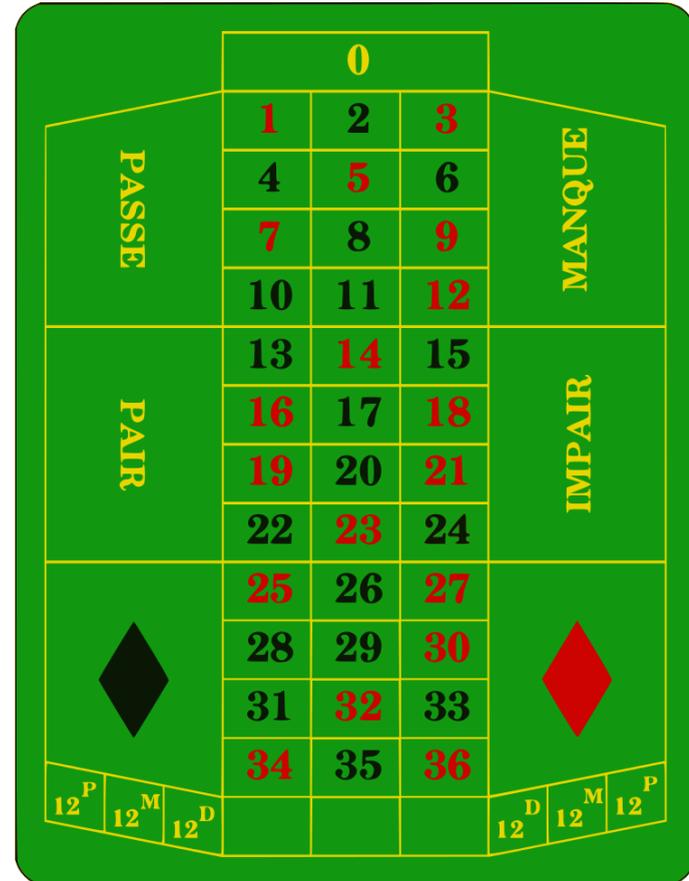
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \dots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \dots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \dots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \dots; 36\}$	$\times 3$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \dots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \dots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \dots; 36\}$	$\times 3$
pair	gerade	$\{2; 4; \dots; 36\}$	$\times 2$
impair	ungerade	$\{1; 3; \dots; 35\}$	$\times 2$
rouge	rote	$\{1; 3; \dots; 36\}$	$\times 2$
noir	schwarze	$\{2; 4; \dots; 35\}$	$\times 2$
manque	erste Hälfte	$\{1; \dots; 18\}$	$\times 2$
passé	zweite Hälfte	$\{19; \dots; 36\}$	$\times 2$



# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \dots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \dots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \dots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \dots; 36\}$	$\times 3$
- double	zwei Dutzend	$\{1; \dots; 24\}$	$\times 1,5$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \dots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \dots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \dots; 36\}$	$\times 3$
- double	zwei Reihen	$\{1; 2; 4; \dots; 35\}$	$\times 1,5$
pair	gerade	$\{2; 4; \dots; 36\}$	$\times 2$
impair	ungerade	$\{1; 3; \dots; 35\}$	$\times 2$
rouge	rote	$\{1; 3; \dots; 36\}$	$\times 2$
noir	schwarze	$\{2; 4; \dots; 35\}$	$\times 2$
manque	erste Hälfte	$\{1; \dots; 18\}$	$\times 2$
passe	zweite Hälfte	$\{19; \dots; 36\}$	$\times 2$



## Bemerkungen:

- ❑ Roulettespieler haben verschiedene Setzmöglichkeiten, die sich als Teilmengen des Ergebnisraums  $\Omega$  beschreiben lassen und die im Erfolgsfall unterschiedliche Auszahlungsquoten erzielen.
- ❑ Für Roulettespieler interessante Spielereignisse sind also bestimmte Teilmengen des Ergebnisraums.
- ❑ Setzt beispielsweise jemand auf „douzaine premiers“ und wird eine 9 ermittelt, so sagt man, das Ereignis „douzaine premiers“ ist eingetreten.
- ❑ Es gibt oft verschiedene Sonderregelungen für das Ergebnis 0; dieses Ergebnis ist aus den meisten Ereignissen ausgeschlossen.
- ❑ Der Gewinn wird abhängig vom eingetretenen Ereignis als Vielfaches des Einsatzes ermittelt. Der maximale Gewinn ist das 36fache des Einsatzes. Beachten Sie, dass dies nicht der Mächtigkeit des Ergebnisraums entspricht.

# Ereignisräume

## Definition 4 (Ereignisraum)

Jede Teilmenge  $A$  eines Ergebnisraums  $\Omega$  heißt **Ereignis**. Das Ereignis  $A$  tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis  $\omega$  vorliegt, dass in  $A$  enthalten ist.

Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  aller Ereignisse heißt **Ereignisraum**.

# Ereignisräume

## Definition 4 (Ereignisraum)

Jede Teilmenge  $A$  eines Ergebnisraums  $\Omega$  heißt **Ereignis**. Das Ereignis  $A$  tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis  $\omega$  vorliegt, dass in  $A$  enthalten ist.

Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  aller Ereignisse heißt **Ereignisraum**.

Besondere Ereignisse:

- Das **unmögliche Ereignis**  $\emptyset$  enthält kein Ergebnis  $\omega \in \Omega$ . Es tritt niemals ein.
- Das **sichere Ereignis**  $\Omega$  enthält alle Ergebnisse  $\omega \in \Omega$ . Es tritt immer ein.
- Das Ereignis  $\{\omega\}$ ,  $\omega \in \Omega$ , heißt **Elementarereignis**.  
Achtung: Elementarereignis  $\{\omega\} \neq$  Ergebnis  $\omega$

Mächtigkeit:

- Ist  $|\Omega| = m$ , so ist  $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^m$ .

## Bemerkungen:

- Wir haben einem Begriff der Umgangssprache einen mathematischen Begriff zugeordnet:  
„Ereignis“  $\mapsto$  Menge.

# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 1:

- Ein Chip auf „manque“ (erste Hälfte)
- Verlust, wenn „passe“ eintritt
- Komplementärmenge

Spiel 2:

- Ein Chip auf „manque“, einer auf  $\{1; 2; 3\}$
- Gewinn wird maximal, wenn  $\{1; 2; 3\}$  eintritt
- Teilmenge

Spiel 3:

- Ein Chip auf „pair“, einer auf  $\{1; 2; 3\}$
- Gewinn wird maximal, wenn  $\{2\}$  eintritt
- Schnittmenge

	0					
PASSE	1	2	3	MANQUE		
	4	5	6			
	7	8	9			
	10	11	12			
PAIR	13	14	15	IMPAIR		
	16	17	18			
	19	20	21			
	22	23	24			
◆	25	26	27	◆		
	28	29	30			
	31	32	33			
	34	35	36			
12 <sup>P</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>D</sup>		12 <sup>D</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>P</sup>

# Ereignisräume

## Definition 5 (Gegenereignis, Teilereignis, Gleichheit)

Das Ereignis  $\bar{A}$  tritt immer genau dann ein, wenn  $A$  nicht eintritt und heißt **Gegenereignis** zu  $A$  oder kurz *nicht-A*.

Ist  $A$  eine Teilmenge von  $B$  (in Zeichen:  $A \subseteq B$ ), so tritt mit dem Ereignis  $A$  stets auch das Ereignis  $B$  ein:  $A$  *zieht* dann  $B$  *nach sich* und heißt **Teilereignis** von  $B$ .

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen **gleich**, wenn  $A$  ein Teilereignis von  $B$  und  $B$  ein Teilereignis von  $A$  ist:

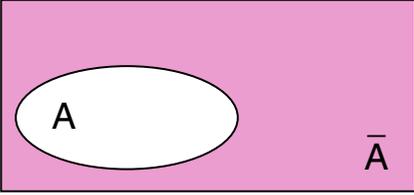
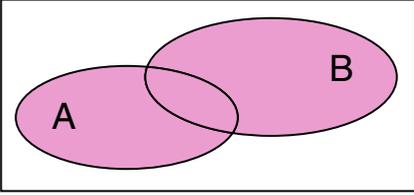
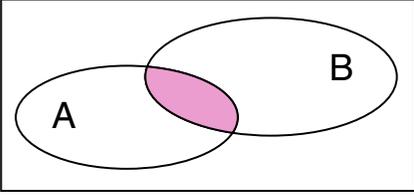
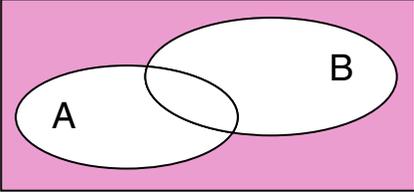
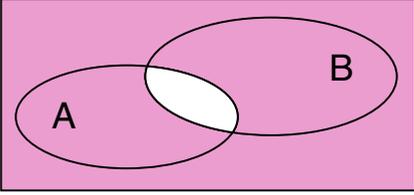
$$A = B \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$

## Bemerkungen:

- ❑ „Umgangssprachliche“ Setzmöglichkeiten des Roulette lassen sich als Mengenverknüpfungen von Ereignissen ausdrücken.
- ❑ Zur Veranschaulichung werden oft Venn-Diagramme verwandt – John Venn (1834–1923) war ein englischer Naturphilosoph.
- ❑ In einem Venn-Diagramm (siehe folgende Folien) umfasst eine geschlossene Kurve (Kreis, Ellipse, Viereck, etc.) die Elemente einer Menge, die man als Punkte in der Ebene auffassen kann.

# Ereignisräume

## Verknüpfung von Ereignissen

$\bar{A}$		$\Omega$	nicht-A / Gegenereignis	tritt ein, wenn A nicht eintritt
$A \cup B$		$\Omega$	A oder B	tritt ein, wenn A oder auch B eintritt
$A \cap B$		$\Omega$	A und B	tritt ein, wenn A und zugleich B eintritt
$\bar{A} \cap \bar{B}$		$\Omega$	nicht-A und nicht-B (= $\overline{A \cup B}$ )	tritt ein, wenn weder A noch B eintritt
$\bar{A} \cup \bar{B}$		$\Omega$	nicht-A oder nicht-B (= $\overline{A \cap B}$ )	tritt ein, wenn höchstens eines der beiden Ereignisse A und B eintritt

[Feuerfeil/Heigel 1999]

## Bemerkungen:

- Die Operationen  $\cup$  und  $\cap$  sind auf mehrere Ereignisse verallgemeinerbar:
  - Ereignis  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse  $A_i$  eintritt
  - Ereignis  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$  tritt ein, wenn alle Ereignisse  $A_i$  eintreten

## □ Wiederholung Mengenalgebra

- Kommutativgesetze  $A \cup B = B \cup A$   
 $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativgesetze  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Distributivgesetze  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Neutrale Elemente  $A \cup \emptyset = A$  und  $A \cap \Omega = A$
- Dominante Elemente  $A \cup \Omega = \Omega$  und  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Komplementäre Elemente  $A \cup \bar{A} = \Omega$  und  $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- Idempotenzgesetze  $A \cup A = A$  und  $A \cap A = A$
- Absorptionsgesetze  $A \cup (A \cap B) = A$   
 $A \cap (A \cup B) = A$
- Gesetze von de Morgan  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$   
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

### Spiel 4:

- Ein Chip auf „douzaine premier“
  - Ein Chip auf „douzaine dernier“
  - Es können nicht beide Ereignisse eintreten
- Leere Schnittmenge  
Unmögliches Ereignis

### Spiel 5:

- Je ein Chip auf  $\{1; 2; 3\}$ ,  $\{4; 5; 6\}$ ,  $\{7; 8; 9\}$ ,  
und  $\{10; 11; 12\}$
  - Gewinn, wenn „douzaine premier“ eintritt  
 $\{1; \dots; 12\} = \{1; 2; 3\} \cup \{4; 5; 6\} \cup \{7; 8; 9\} \cup \{10; 11; 12\}$ ;  
Gewinn äquivalent zu 4 Chips auf dieses Ereignis.
- Zerlegung in disjunkte Teilereignisse

	0					
PASSE	1	2	3	MANQUE		
	4	5	6			
	7	8	9			
	10	11	12			
PAIR	13	14	15	IMPAIR		
	16	17	18			
	19	20	21			
	22	23	24			
◆	25	26	27	◆		
	28	29	30			
	31	32	33			
	34	35	36			
12 <sup>P</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>D</sup>		12 <sup>D</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>P</sup>

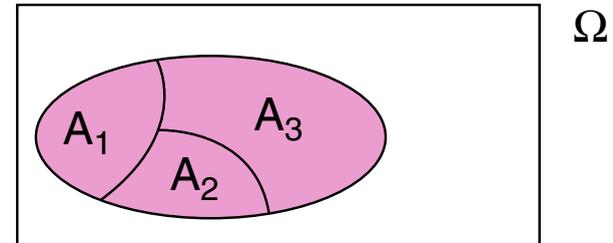
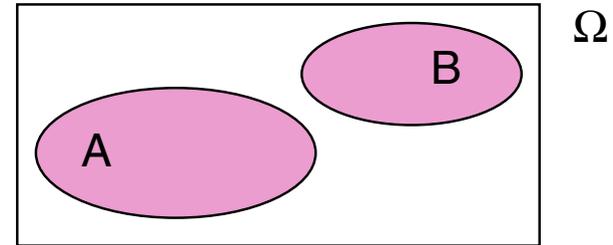
# Ereignisräume

## Definition 6 (unvereinbar, vereinbar, Zerlegung)

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  mit  $A \cap B = \emptyset$  heißen **unvereinbar** (ansonsten **vereinbar**).

Die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_m$  ( $m \geq 2$ ) heißen **paarweise unvereinbar**, wenn jeweils zwei von ihnen unvereinbar sind.

Eine Menge paarweise unvereinbarer Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_m$  mit  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  heißt **Zerlegung** von  $A$  in die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_m$ .



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

## Bemerkungen:

- Mehr als zwei Ereignisse heißen **vollständig unvereinbar**, wenn sie nicht alle zugleich eintreten können.