Kapitel PTS:III

III. Kombinatorik

- Permutationen und Kombinationen
- Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten
- Urnenmodell

Bemerkungen:

- Kombinatorik ist die Lehre vom Abzählen schwer überschaubarer Mengen.
- In der Wahrscheinlichkeitsrechnung dient sie der Abschätzung der Mächtigkeit von Ergebnisräumen sowie bestimmter Ereignisse.
- „Kombinieren“ hieß ursprünglich „je zwei Dinge verbinden“ (lateinisch ‘bini’: „je zwei“). Heute: „zusammenstellen“ / „verbinden“ ohne Anzahlbeachtung.

Permutationen und Kombinationen

Beispiel: Buchstabenkombinationen

- Welcher 11 Zeichen lange Name enthält nur die Buchstaben I, M, P, und S?

␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣

Permutationen und Kombinationen

Beispiel: Buchstabenkombinationen

- Welcher 11 Zeichen lange Name enthält nur die Buchstaben I, M, P, und S?

M I S S I S S I P P I

- Es gibt 4.194.304 Möglichkeiten, 11 Zeichen lange Wörter aus den vier Buchstaben zu bilden.

- Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben MISSISSIPPI anordnen?

Permutationen und Kombinationen

Beispiel: Buchstabenkombinationen

- Welcher 11 Zeichen lange Name enthält nur die Buchstaben I, M, P, und S?

M I S S I S S I P P I

- Es gibt 4.194.304 Möglichkeiten, 11 Zeichen lange Wörter aus den vier Buchstaben zu bilden.

- Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben MISSISSIPPI anordnen?

- Das hängt davon ab, ob die einzelnen Buchstaben unterscheidbar sind:

$$\text{MI}_1\text{S}_1\text{S}_2\text{I}_2\text{S}_3\text{S}_4\text{I}_3\text{P}_1\text{P}_2\text{I}_4 \overset{?}{=} \text{MI}_1\text{S}_2\text{S}_1\text{I}_2\text{S}_3\text{S}_4\text{I}_3\text{P}_1\text{P}_2\text{I}_4$$

Permutationen und Kombinationen

Beispiel: Buchstabenkombinationen

- Welcher 11 Zeichen lange Name enthält nur die Buchstaben I, M, P, und S?

M I S S I S S I P P I

- Es gibt 4.194.304 Möglichkeiten, 11 Zeichen lange Wörter aus den vier Buchstaben zu bilden.

- Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben MISSISSIPPI anordnen?

- Das hängt davon ab, ob die einzelnen Buchstaben unterscheidbar sind:

$$\mathrm{M}\mathrm{I}_1\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\mathrm{I}_2\mathrm{S}_3\mathrm{S}_4\mathrm{I}_3\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{I}_4 \stackrel{?}{=} \mathrm{M}\mathrm{I}_1\mathrm{S}_2\mathrm{S}_1\mathrm{I}_2\mathrm{S}_3\mathrm{S}_4\mathrm{I}_3\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{I}_4$$

- Wenn ja sind es 39.916.800 Möglichkeiten, wenn nein 34.650.

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

Stichprobe	ohne Wiederholung $(k \leq n)$	mit Wiederholung
geordnet		
ungeordnet		

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

Stichprobe	**ohne Wiederholung** $(k \leq n)$	**mit Wiederholung**
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ k_i = Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge $(k > n)$
	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

Stichprobe	**ohne Wiederholung** $(k \leq n)$	**mit Wiederholung**
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ $k_i =$ Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge $(k > n)$
geordnet	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge

Beispiel: Zahlenkombinationsschloss

- Gegeben ein Schloss, dessen Schlüssel eine 4-stellige Zahlenkombination ist.
- Einstellbare Zahlen je Ziffer: 0–9
- Wie viele mögliche Zahlenkombinationen gibt es?

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge

Beispiel: Zahlenkombinationsschloss

- Gegeben ein Schloss, dessen Schlüssel eine 4-stellige Zahlenkombination ist.
- Einstellbare Zahlen je Ziffer: 0–9
- Wie viele mögliche Zahlenkombinationen gibt es?

- Anwendung des Zählprinzips:
  - Erste Ziffer: 10 Möglichkeiten
  - Zweite Ziffer: 10 Möglichkeiten
  - Dritte Ziffer: 10 Möglichkeiten
  - Vierte Ziffer: 10 Möglichkeiten

➜ $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10.000$ Möglichkeiten

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge

Beispiel: Zahlenkombinationsschloss

- Gegeben ein Schloss, dessen Schlüssel eine 4-stellige Zahlenkombination ist.
- Einstellbare Zahlen je Ziffer: 0–9
- Wie viele mögliche Zahlenkombinationen gibt es?
- Anwendung des Zählprinzips:
  - Erste Ziffer: 10 Möglichkeiten
  - Zweite Ziffer: 10 Möglichkeiten
  - Dritte Ziffer: 10 Möglichkeiten
  - Vierte Ziffer: 10 Möglichkeiten

→ $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10.000$ Möglichkeiten

- Die Zahlenkombinationen sind 4-Tupel aus der 10-Menge $\{0; \ldots; 9\}$ mit 10 Möglichkeiten pro Stelle unter Beachtung der Reihenfolge.

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge

Definition 1 (k-Tupel aus einer n-Menge)

Ein k-Tupel, bei dem für jede der k Stellen alle n Elemente einer n-Menge zur Verfügung stehen, heißt k-Tupel aus einer n-Menge.

Satz 2 (Anzahl k-Tupel aus einer n-Menge)

Die Anzahl der verschiedenen k-Tupel aus einer n-Menge ist n^k.

Bemerkung:

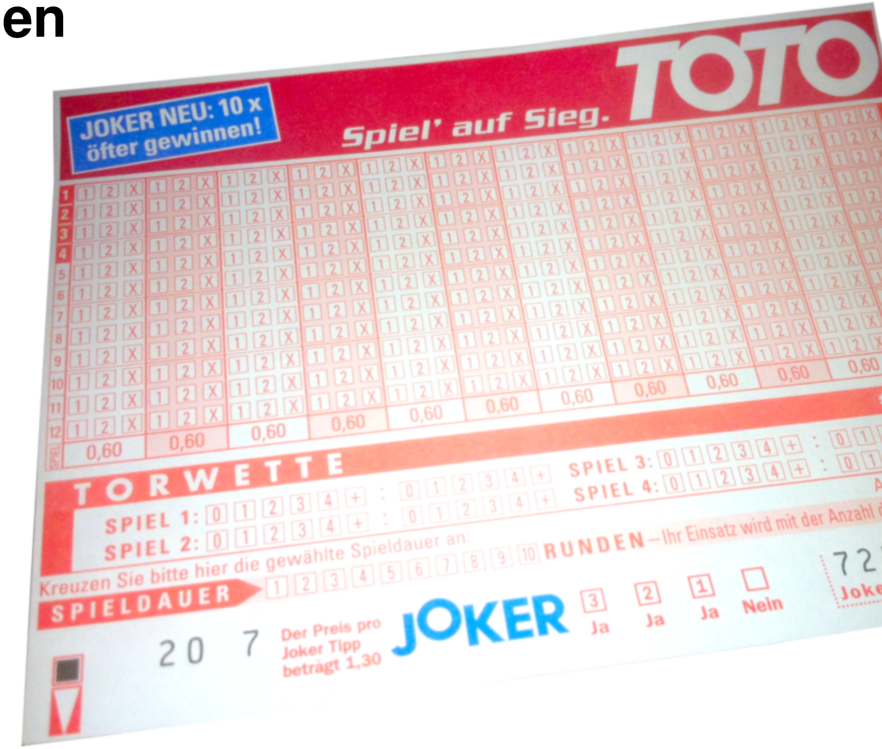
- Zwei k-Tupel sind genau dann gleich, wenn sie an jeder Stelle übereinstimmen.
- Zwei k-Tupel sind genau dann verschieden, wenn sie an mindestens einer Stelle nicht übereinstimmen.

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge

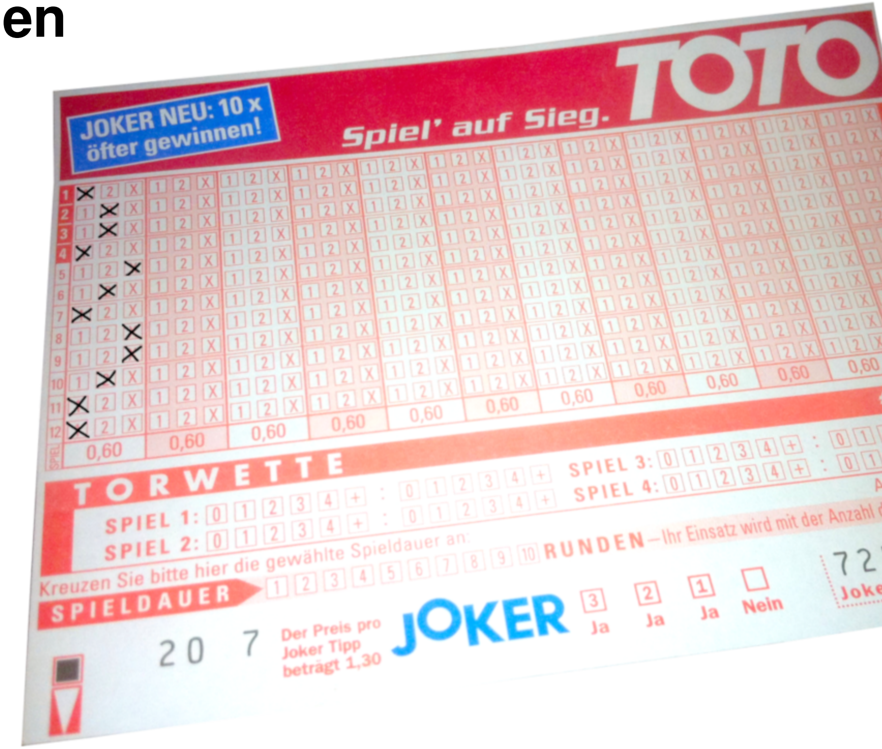
Beispiel: Fußballtoto

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Fußballtoto-Block mit 12 Spielen auszufüllen?



Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge



Beispiel: Fußballtoto

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Fußballtoto-Block mit 12 Spielen auszufüllen?

- Ein Tipp ist ein 12-Tupel aus der 3-Menge $\{1; 2; X\}$.

Permutationen und Kombinationen

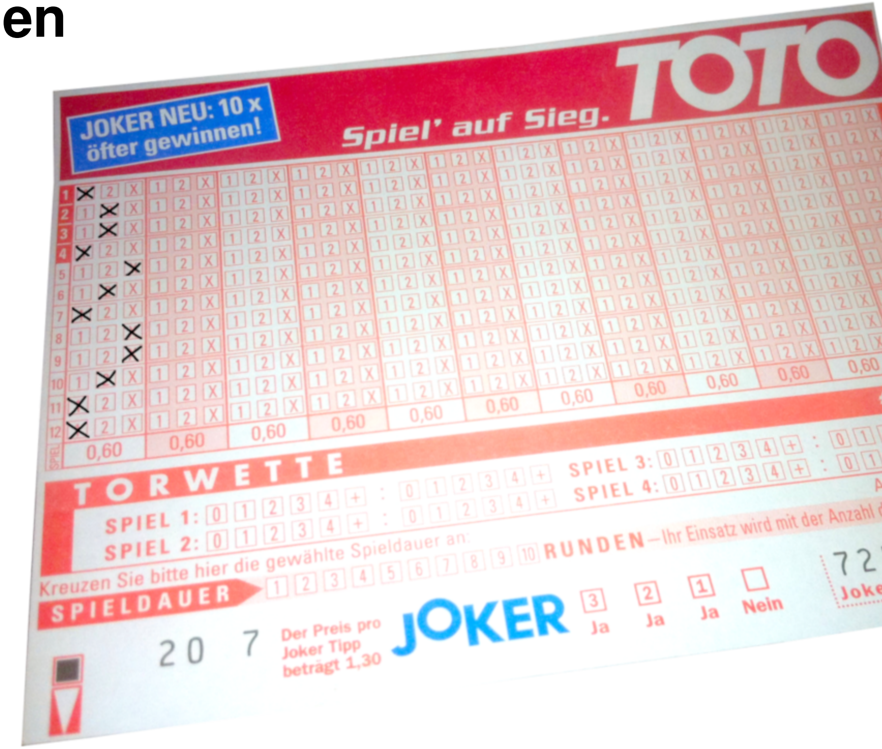
Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge

Beispiel: Fußballtoto

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Fußballtoto-Block mit 12 Spielen auszufüllen?

- Ein Tipp ist ein 12-Tupel aus der 3-Menge $\{1; 2; X\}$.

➜ $3^{12} = 531.441$ Möglichkeiten (Satz 2)



Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

Stichprobe	ohne Wiederholung $(k \leq n)$	mit Wiederholung
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ k_i = Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge $(k > n)$
	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der Permutationen einer n-Menge

Beispiel: 100m Sprint

- Angenommen, die Startbahnen der 8 Läufer:innen würden ausgelost.
- Wie viele Startaufstellungen gäbe es?

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der Permutationen einer n-Menge

Beispiel: 100m Sprint

- Angenommen, die Startbahnen der 8 Läufer:innen würden ausgelost.
- Wie viele Startaufstellungen gäbe es?
- Die Auslosung entspricht 8 Ziehungen aus einer Urne mit 8 Losen.
- Eine Startaufstellung ist ein 8-Tupel aus der 8-Menge der Läufer:innen.

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der Permutationen einer n-Menge

Beispiel: 100m Sprint

- Angenommen, die Startbahnen der 8 Läufer:innen würden ausgelost.
- Wie viele Startaufstellungen gäbe es?
- Die Auslosung entspricht 8 Ziehungen aus einer Urne mit 8 Losen.
- Eine Startaufstellung ist ein 8-Tupel aus der 8-Menge der Läufer:innen.
- Zählprinzip:
  - Vergabe 1. Bahn: 8 Möglichkeiten
  - Vergabe 2. Bahn: noch 7 Möglichkeiten

    $\vdots$
  - Vergabe 8. Bahn: noch 1 Möglichkeit

➜ $8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 40.320$ Startaufstellungen

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der Permutationen einer n-Menge

Definition 3 (n-Permutation einer n-Menge)

Ein n-Tupel mit n *verschiedenen* Elementen aus einer n-Menge heißt n-Permutation einer n-Menge oder kurz Permutation einer n-Menge.

Für das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n schreibt man abkürzend

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \qquad \text{(gesprochen: } n\text{-Fakultät)},$$

wobei das Zeichen „!“ hier ein mathematisches Symbol ist.

Satz 4 (Anzahl der Permutationen einer n-Menge)

Die Anzahl der Permutationen einer n-Menge ist $n!$.

Bemerkungen:

- Der Begriff der Permutation (Versetzung, Vertauschung) wurde von Jakob Bernoulli eingeführt (1655–1705, Schweizer Mathematiker).
- Zu einer n-Menge gibt es nach dem Zählprinzip

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

  Permutationen. Diese Formel wird auch in „Ars Combinatoria" von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716, deutscher Universalgelehrter) beschrieben.
- Aber schon vorher berechnete Luca Pacioli (1445–1517, italienischer Mathematiker) die Anzahl der Möglichkeiten, 10 Personen um einen Tisch zu platzieren, und sagt, dass man fortfahrend so auch die Anzahl für mehr als 10 Personen ausrechnen kann.

Jakob Bernoulli

Gottfried Wilhelm Leibniz

Luca Pacioli

Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Die Schreibweise $n!$ tritt erst im 19. Jahrhundert auf.
- Der Wert von $n!$ wächst mit zunehmendem n sehr schnell [Ars Combinatoria]:

$$
\begin{aligned}
1! &= 1 & \qquad 7! &= 5.040\\
2! &= 2 & 8! &= 40.320\\
3! &= 6 & 9! &= 362.880\\
4! &= 24 & 10! &= 3.628.800\\
5! &= 120 & 11! &= 39.916.800\\
6! &= 720 & 12! &= 479.001.600
\end{aligned}
$$

- Es gibt also $10! = 3.628.800$ Sitzordnungen für 10 Personen an einem Tisch. Für einen größeren Empfang mit 100 Personen gibt es dann etwa $9{,}33 \cdot 10^{157}$ Möglichkeiten.
- Da sich diese Größenordnungen der Vorstellungskraft entziehen: Die „entsprechende“ Zeit, die man benötigen würde, wenn man alle Möglichkeiten ausprobieren wollte und man pro Sitzordnung nur 10 Sekunden bräuchte, wären 420 Tage.

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der Permutationen einer n-Menge

Beispiel: Buchstabenkombinationen

- Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben MISSISSIPPI anordnen?

- Das hängt davon ab, ob die einzelnen Buchstaben unterscheidbar sind:

$$\text{MI}_1\text{S}_1\text{S}_2\text{I}_2\text{S}_3\text{S}_4\text{I}_3\text{P}_1\text{P}_2\text{I}_4 \quad \stackrel{?}{=} \quad \text{MI}_1\text{S}_2\text{S}_1\text{I}_2\text{S}_3\text{S}_4\text{I}_3\text{P}_1\text{P}_2\text{I}_4$$

→ Wenn ja: $11! = 39.916.800$ Möglichkeiten

- Im Folgenden der andere Fall.

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

Stichprobe	ohne Wiederholung ($k \leq n$)	mit Wiederholung
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ k_i = Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge ($k > n$)
	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge mit Wiederholung ($k > n$)

Beispiel: Buchstabenkombinationen 2

- Wie viele mögliche Anordnungen der 5 Buchstaben `aaabc` gibt es, wenn man die `a`s nicht unterscheiden kann?

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge mit Wiederholung ($k > n$)

Beispiel: Buchstabenkombinationen 2

- Wie viele mögliche Anordnungen der 5 Buchstaben `aaabc` gibt es, wenn man die `a`s nicht unterscheiden kann?

- Es gibt $5!$ Anordnungen von `xyzbc`.

- Es gibt $3!$ Anordnungen von `xyz`.

- Sei m die Anzahl der möglichen Kombinationen von `bc` mit `xyz`, dann gilt:

$$m \cdot \underbrace{3!}_{\texttt{xyz}} = \underbrace{5!}_{\texttt{xyzbc}}$$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge mit Wiederholung ($k > n$)

Beispiel: Buchstabenkombinationen 2

- Wie viele mögliche Anordnungen der 5 Buchstaben `aaabc` gibt es, wenn man die `a`s nicht unterscheiden kann?

- Es gibt $5!$ Anordnungen von `aaabc` (bei unterscheidbaren `a`s).

- Es gibt $3!$ Anordnungen von `aaa` (bei unterscheidbaren `a`s).

- Sei m die Anzahl der möglichen Kombinationen von `bc` mit `aaa`, dann gilt:

$$m \cdot \underbrace{3!}_{\texttt{aaa}} = \underbrace{5!}_{\texttt{aaabc}}$$

- Die Zahl m entspricht der Anzahl der Anordnungen von `aaabc`, wenn die `a`s nicht unterscheidbar sind:

$$m = \frac{5!}{3!}$$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge mit Wiederholung ($k > n$)

Definition 5 (k-Permutation aus einer n-Menge mit Wiederholung ($k > n$))

Ein k-Tupel mit Elementen a_i ($i = 1; 2; 3; \ldots; n$) aus einer n-Menge, wobei a_i genau k_i-mal vorkommt ($k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$), heißt k-Permutation aus einer n-Menge mit Wiederholung ($k > n$).

- Sei m die Anzahl solcher k-Permutationen.
- Angenommen, die k_i Elemente a_i seien verschieden, dann gilt:

$$m \cdot k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n! = k! \,.$$

Satz 6 (Anzahl der k-Permutation aus einer n-Menge mit Wiederholung ($k > n$))

Die Anzahl der k-Permutation mit Wiederholung bei jeweils k_i Elementen a_i aus einer n-Menge ($k > n; \quad i = 1; 2; \ldots; n; \quad k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$) ist gleich

$$\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \,.$$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge mit Wiederholung ($k > n$)

Beispiel: Buchstabenkombinationen

- Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben MISSISSIPPI anordnen?
- Das hängt davon ab, ob die einzelnen Buchstaben unterscheidbar sind:

$$\mathrm{MI_1S_1S_2I_2S_3S_4I_3P_1P_2I_4} \overset{?}{=} \mathrm{MI_1S_2S_1I_2S_3S_4I_3P_1P_2I_4}$$

- Wenn ja: $11! = 39.916.800$ Möglichkeiten
- Wenn nicht:

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 34.650 \text{ Möglichkeiten,}$$

  da je 4-mal S und I, 2-mal P und 1-mal M vorkommt.

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

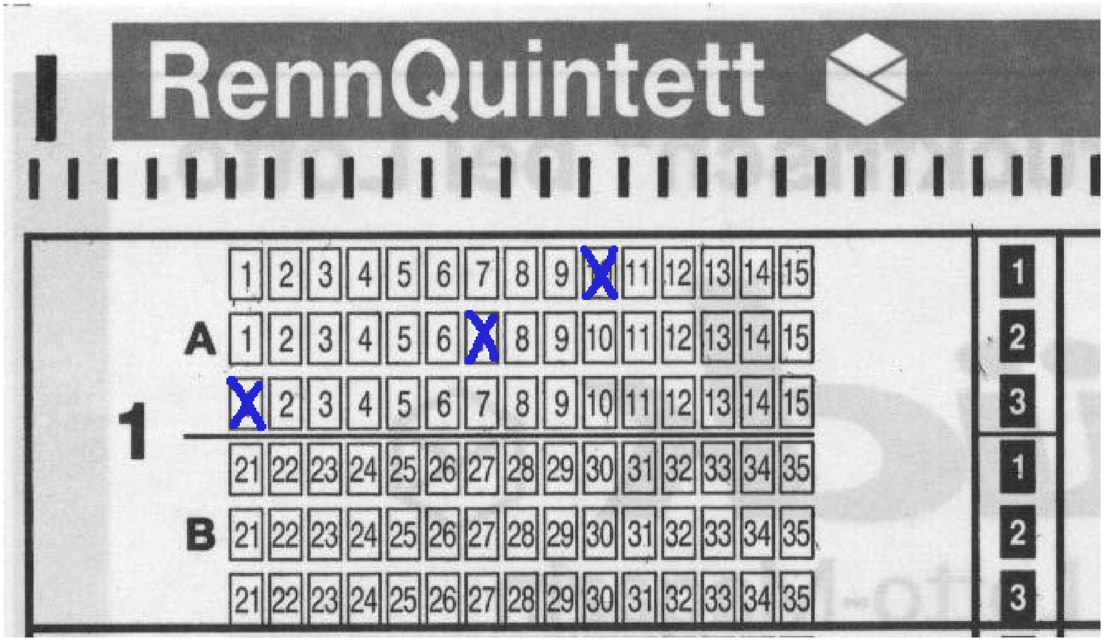
Stichprobe	ohne Wiederholung ($k \leq n$)	mit Wiederholung
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ k_i = Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge ($k > n$)
	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge ohne Wiederholung ($k \leq n$)

Beispiel: RennQuintett „3 aus 15“

- Vorhersage der ersten drei von 15 startenden Pferden eines Rennens.
- Wettscheine sind 3-Tupel verschiedener Elemente der 15-Menge $\{1; \ldots; 15\}$.
- Gemäß Zählprinzip gibt es $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ mögliche Wetten.



Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge ohne Wiederholung ($k \leq n$)

Definition 7 (k-Permutationen aus einer n-Menge ohne Wiederholung ($k \leq n$))

Ein k-Tupel mit k verschiedenen Elementen aus einer n-Menge ($k \leq n$) heißt k-Permutation aus einer n-Menge ohne Wiederholung ($k \leq n$).

- Nach dem Zählprinzip gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ viele k-Permutationen aus einer n-Menge ohne Wiederholung ($k \leq n$).
- Multiplikation mit $(n-k)!$ erweitern diese Zahl zu $n!$:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)! = n!\,.$$

Satz 8 (Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge ohne Wiederholung ($k \leq n$))

Die Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge ohne Wiederholung ($k \leq n$) ist

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

Bemerkungen:

- n-Permutationen einer n-Menge lassen sich als Sonderfall von Satz 8 mit $k = n$ darstellen:

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \; .$$

Aus Satz 4 ist diese Anzahl schon als $n!$ bekannt, daher ist es sinnvoll,

$$0! = 1$$

zu vereinbaren.

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

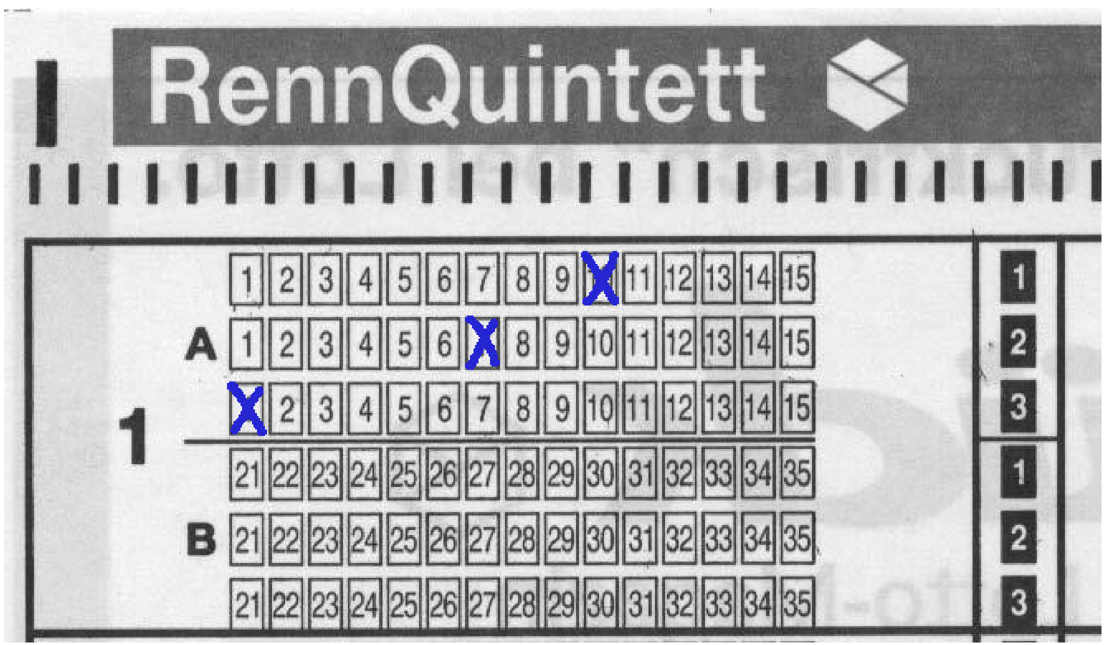
Stichprobe	ohne Wiederholung ($k \leq n$)	mit Wiederholung
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ $k_i =$ Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge ($k > n$)
	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge

Beispiel: RennQuintett „3 aus 15“

- Vorhersage der ersten drei von 15 startenden Pferden eines Rennens.
- Gewinnklasse 2 bei Vorhersage der ersten drei in anderer Reihenfolge.
- Wie viele Wetten bzw. 3-Teilmengen aus der 15-Menge $\{1; \ldots ; 15\}$ gibt es?



Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge

Beispiel: RennQuintett „3 aus 15“

- Vorhersage der ersten drei von 15 startenden Pferden eines Rennens.
- Gewinnklasse 2 bei Vorhersage der ersten drei in anderer Reihenfolge.
- Wie viele Wetten bzw. 3-Teilmengen aus der 15-Menge $\{1; \ldots; 15\}$ gibt es?

- Es gibt $15 \cdot 14 \cdot 13$ 3-Permutationen aus einer 15-Menge ohne Wiederholung.
- Da für Gewinnklasse 2 die Reihenfolge keine Rolle spielt, muss diese Zahl durch $3!$ dividiert werden, der Anzahl der Permutationen einer 3-Menge:

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = 455 \text{ Möglichkeiten}$$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge

Verallgemeinerung:

$$\text{Anzahl } k\text{-Teilmengen} = \frac{\text{Anzahl } k\text{-Permutationen aus einer } n\text{-Menge ohne Wiederholung } (k \le n)}{\text{Anzahl Permutationen einer } k\text{-Menge}}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Dieser Term spielt eine wichtige Rolle und bekommt daher eine abkürzende Schreibweise (gesprochen „n über k“):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad (n \in \mathbf{N}; k \in \{0; 1; \cdots; n\})$$

Satz 9 (Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge)

Die Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge ist $\binom{n}{k}$.

Bemerkungen:

- In Anlehnung an das Auswählen einer k-Teilmenge aus einer n-Menge spricht man $\binom{n}{k}$ manchmal als „k aus n“ aus.

- Das Symbol $\binom{n}{k}$ hat sich im 19. Jahrhundert eingebürgert. Früher bezeichnete man die k-Mengen aus einer n-Menge als „Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung“.

- Blaise Pascal (1623–1662, autodikatisch gebildeter französischer Mathematiker) entdeckte die Formel für die Anzahl der Teilmengen wohl als Erster, hatte aber noch kein Symbol dafür.

- Pascal fand die Zahlen, die heute als $\binom{n}{k}$ bezeichnet werden, auch als Koeffizienten in der Entwicklung des Binoms $(a+b)^n$ (Binom = Polynom mit zwei Gliedern bzw. Summe zweier Monome). Ausgehend vom Produkt $(a+b_1)\cdot(a+b_2)\cdot\ldots\cdot(a+b_n)$, wobei die $b_i \neq 0$ und verschieden sind, fragt man nach der Anzahl der beim Ausmultiplizieren entstehenden Summanden mit genau k Faktoren b_i (und also $(n-k)$ Faktoren a). Dies ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus der n-Menge $\{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$ auszuwählen, also $\binom{n}{k}$.

- Setzt man dann noch alle $b_i = b$, so erhält man die Binomische Formel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

wobei $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ist. In kurzer Summenschreibweise also:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Die $\binom{n}{k}$ nennt man daher auch Binomialkoeffizienten.
- Die Binomialkoeffizienten sind stets natürliche Zahlen ($\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$, da im Zähler dann 0 als Faktor auftaucht). In der Bruchdarstellung sieht man ja eigentlich nicht direkt, dass sich der Zähler ohne Rest durch den Nenner teilen lässt. Da es im Zähler k verschiedene aufeinanderfolgende Zahlen als Faktoren gibt, kann man sich durch Überlegen erschließen, dass jeder dieser Faktoren durch mindestens einen der Faktoren im Nenner ohne Rest teilbar ist und beim „Kürzen“ für jeden Zähler-Faktor auch ein Nenner-Faktor „übrig“ bleibt.
- Die Fakultätendarstellung der Binomialkoeffizienten kann man sich zwar gut einprägen, die Berechnung geht aber bei kleinem k mit der gekürzten Form schneller (Hervorhebung: k-Permutation aus einer n-Menge):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \; .$$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge

Beispiel: Fächerproblem

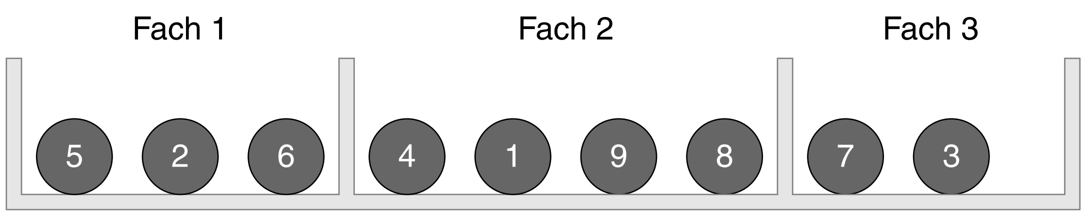
- Auf wie viele Arten lassen sich k *unterscheidbare* (z.B. nummerierte) Kugeln auf n Fächer verteilen, so dass im i-ten Fach k_i Kugeln liegen ($\sum k_i = k$)?

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge

Beispiel: Fächerproblem

- Auf wie viele Arten lassen sich k *unterscheidbare* (z.B. nummerierte) Kugeln auf n Fächer verteilen, so dass im i-ten Fach k_i Kugeln liegen ($\sum k_i = k$)?
- Sei $k = 9$, $n = 3$, $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, und $k_3 = 2$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Anzahl der Möglichkeiten, die Fächer der Reihe nach zu befüllen:

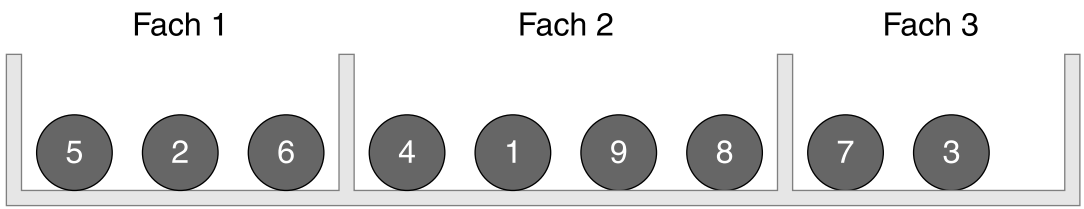
$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge

Beispiel: Fächerproblem

- Auf wie viele Arten lassen sich k *unterscheidbare* (z.B. nummerierte) Kugeln auf n Fächer verteilen, so dass im i-ten Fach k_i Kugeln liegen ($\sum k_i = k$)?
- Sei $k = 9$, $n = 3$, $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, und $k_3 = 2$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Anzahl der Möglichkeiten, die Fächer der Reihe nach zu befüllen:

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

Verallgemeinerung:

$$\frac{k!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!}$$

Bemerkungen:

- Die Verallgemeinerung erinnert an die Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge mit n Klassen von jeweils k_i gleichen Elementen für $k > n$ (Satz 6). Die Analogie erschließt sich, da immer jeweils $k_i!$ Permutationen der Kugeln im i-ten Fach dieselbe Aufteilung ergeben; die Reihenfolge innerhalb eines Fachs ist unwichtig.

- Das Fächerproblem taucht in der Physik beispielsweise bei der Modellierung von Teilchen in verschiedenen Anregungszuständen auf.

- Beim Kartenverteilen können die Kugeln in den Fächern als Karten der Mitspielenden angesehen werden. Beim Skat werden 32 Karten auf drei Spielende (je 10 Karten) und den Skat (2 Karten) aufgeteilt. Dafür gibt es

  $$\frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!} = 2.753.294.408.504.640$$

  Möglichkeiten, also 2,7 Billiarden. Dies gilt vor dem Reizen.

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

Stichprobe	ohne Wiederholung $(k \leq n)$	mit Wiederholung
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ k_i = Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge $(k > n)$
	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge

Beispiel: Fächerproblem 2

- Auf wie viele Arten lassen sich k *nicht unterscheidbare* Kugeln auf n Fächer verteilen, wenn ein Fach bis zu k Kugeln aufnehmen kann?

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge

Beispiel: Fächerproblem 2

- Auf wie viele Arten lassen sich k *nicht unterscheidbare* Kugeln auf n Fächer verteilen, wenn ein Fach bis zu k Kugeln aufnehmen kann?

- Sei $k = 3$ und $n = 3$.

  Modellierung als Positionsnummern (Pos.-Nr.), wobei jede Position entweder von einer Kugel „•“ oder einem Fachtrenner „ | “ eingenommen werden kann.

Positionen 1	2	3	4	5	Pos.-Nr. der $\vert$
●	●	●	$\vert$	$\vert$	4; 5
●	●	$\vert$	●	$\vert$	3; 5
●	●	$\vert$	$\vert$	●	3; 4
●	$\vert$	●	●	$\vert$	2; 5
●	$\vert$	●	$\vert$	●	2; 4
●	$\vert$	$\vert$	●	●	2; 3
$\vert$	●	●	●	$\vert$	1; 5
$\vert$	●	●	$\vert$	●	1; 4
$\vert$	●	●	$\vert$	●	1; 3
$\vert$	$\vert$	●	●	●	1; 2

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge

Beispiel: Fächerproblem 2

- Auf wie viele Arten lassen sich k *nicht unterscheidbare* Kugeln auf n Fächer verteilen, wenn ein Fach bis zu k Kugeln aufnehmen kann?

- Sei $k = 3$ und $n = 3$.

  Modellierung als Positionsnummern (Pos.-Nr.), wobei jede Position entweder von einer Kugel „•“ oder einem Fachtrenner „ $\vert$ “ eingenommen werden kann.

Positionen 1	2	3	4	5	Pos.-Nr. der $\vert$
●	●	●	$\vert$	$\vert$	4; 5
●	●	$\vert$	●	$\vert$	3; 5
●	●	$\vert$	$\vert$	●	3; 4
●	$\vert$	●	●	$\vert$	2; 5
●	$\vert$	●	$\vert$	●	2; 4
●	$\vert$	$\vert$	●	●	2; 3
$\vert$	●	●	●	$\vert$	1; 5
$\vert$	●	●	$\vert$	●	1; 4
$\vert$	●	●	$\vert$	●	1; 3
$\vert$	$\vert$	●	●	●	1; 2

- Die Fachtrenner können auf $\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$ Arten gesetzt werden.

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge

Beispiel: Fächerproblem 2

- Auf wie viele Arten lassen sich k *nicht unterscheidbare* Kugeln auf n Fächer verteilen, wenn ein Fach bis zu k Kugeln aufnehmen kann?

- Sei $k = 3$ und $n = 3$.
  Modellierung als Positionsnummern (Pos.-Nr.), wobei jede Position entweder von einer Kugel „•“ oder einem Fachtrenner „ $\mid$ “ eingenommen werden kann.

Positionen					Pos.-Nr.
1	2	3	4	5	der $\mid$
•	•	•	$\mid$	$\mid$	4; 5
•	•	$\mid$	•	$\mid$	3; 5
•	•	$\mid$	$\mid$	•	3; 4
•	$\mid$	•	•	$\mid$	2; 5
•	$\mid$	•	$\mid$	•	2; 4
•	$\mid$	$\mid$	•	•	2; 3
$\mid$	•	•	•	$\mid$	1; 5
$\mid$	•	•	$\mid$	•	1; 4
$\mid$	•	•	$\mid$	•	1; 3
$\mid$	$\mid$	•	•	•	1; 2

- Die Fachtrenner können auf $\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$ Arten gesetzt werden.

Verallgemeinerung:

- n Fächer erfordern $(n-1)$ Fachtrenner.

- Mit k Kugeln gibt es dann $(k+n-1)$ Positionen und insgesamt

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$ Möglichkeiten, die Kugeln zu verteilen.

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge

Definition 10 (k-Kombination aus einer n-Menge)

Eine Zusammenstellung von k Elementen a_i aus einer n-Menge, bei der es *nicht* auf die Reihenfolge ankommt und bei der auch alle möglichen Wiederholungen zugelassen sind, heißt k-Kombination aus einer n-Menge.

Satz 11 (Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge)

Die Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge ist gleich

$$\binom{n+k-1}{k} .$$

Bemerkung:

- Satz 11 wurde von Jakob Bernoulli (1655–1705, Schweizer Mathematiker) entdeckt.
- Da $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ für $a \geq b$ gilt, ist $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$.
- Eine k-Teilmenge aus einer n-Menge wäre demnach eine k-Kombination mit verschiedenen Elementen aus einer n-Menge, wobei $k \leq n$.

Permutationen und Kombinationen

Anzahl der k-Kombinationen aus einer n-Menge

Beispiel: Würfeln

- Würfelwurf mit zwei nicht unterscheidbaren sechsseitigen Würfeln.
- Die Wurfmuster sind 2-Kombinationen aus der 6-Menge $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Nach Satz 11 gibt es

$$\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21 \quad \text{Wurfmuster.}$$

- Bei drei Würfeln gibt es

$$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56 \quad \text{Wurfmuster.}$$

Bemerkungen:

- Bereits Niccolò Tartaglia (1500–1557, venezianischer Mathematiker) konnte die Anzahl verschiedener Wurfmuster für das Werfen von 2–8 ununterscheidbaren Würfeln ausrechnen.

- Tartaglia beschäftigte sich mit dem Problem, weil er während des Karnevals 1523 in Verona Menschen mit drei Würfeln das „Glücksbuch / Losbuch / Schicksalsbuch des Lorenzo Spirito“ befragen sah. Auf jedem Blatt dieses Buches befanden sich alle 56 Wurfmuster mit drei Würfeln (hatte der Autor durch Probieren gefunden). Tartaglia wollte die Musteranzahl dann für andere Würfelzahlen ausrechnen.

Niccolò Tartaglia

Auszug aus
„Il Libro delle Sorti“, 1482

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

Stichprobe	ohne Wiederholung ($k \leq n$)	mit Wiederholung
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ $k_i =$ Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge ($k > n$)
	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

- $k \sim$ Größe einer Stichprobe
- $n \sim$ Größe der Menge aus der gezogen wird
- Die Formel ermittelt die Anzahl möglicher voneinander verschiedener Stichproben
- geordnet / ungeordnet $\sim$ mit / ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
- ohne / mit Wiederholung $\sim$ ohne / mit Zurücklegen

Permutationen und Kombinationen

Fallunterscheidung

Stichprobe	**ohne Wiederholung** $(k \leq n)$	**mit Wiederholung**
geordnet	Permutationen einer n-Menge $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ $k_i =$ Wiederholungen des i-ten Elements der n-Menge $(k > n)$
	k-Permutationen aus n-Menge $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	k-Tupel aus n-Menge $n^k \quad (k \geq 0)$
ungeordnet	k-Teilmengen aus n-Menge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$

Beispiel: $n = 5; k = 3$

Stichprobe	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
geordnet	120	–
	60	125
ungeordnet	10	35