Kapitel PTS:III

III. Kombinatorik

- Permutationen und Kombinationen
- Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten
- Urnenmodell

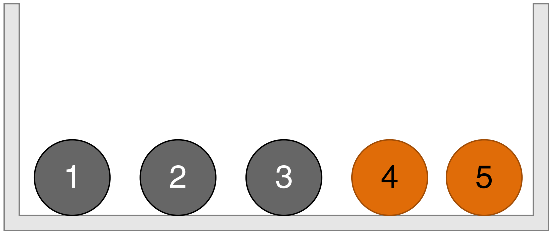
Urnenmodell

Einführung

- Modelle dienen der Lösung statistischer Problemstellungen.
- Sie sind einfacher und durchschaubarer als die Wirklichkeit.
- Sie bilden idealerweise alle wichtigen Charakteristika ab.
- Das Urnenmodell eignet sich zur Modellierung vieler realer Begebenheiten.

Urnenmodell

Einführung

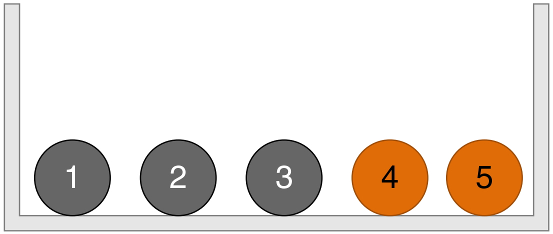


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Aufbau:

- Urne mit N Kugeln.
- K Kugeln sind schwarz, und $N - K$ rot.
- Die Kugeln sind gleichartig: gleich groß, gleich schwer, einwandfrei rund, usw.
  O.B.d.A.: Zur Vereinfachung der Notation denken wir uns die Kugeln nummeriert.

Urnenmodell
Einführung



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Aufbau:

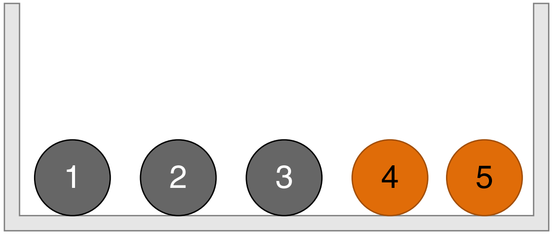
- Urne mit N Kugeln.
- K Kugeln sind schwarz, und $N - K$ rot.
- Die Kugeln sind gleichartig: gleich groß, gleich schwer, einwandfrei rund, usw.
  O.B.d.A.: Zur Vereinfachung der Notation denken wir uns die Kugeln nummeriert.

Zufallsexperiment:

- Ziehen von n Kugeln nacheinander und Feststellung ihrer jeweiligen Farben.
  Vor jeder Ziehung einer Kugel werden die Kugeln in der Urne sorgfältig durchmischt.
- Ergebnis eines Experiments sind n Kugelfarben, k schwarze und $n - k$ rote.

Urnenmodell

Einführung



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Aufbau:

- Urne mit N Kugeln.
- K Kugeln sind schwarz, und $N - K$ rot.
- Die Kugeln sind gleichartig: gleich groß, gleich schwer, einwandfrei rund, usw.
  O.B.d.A.: Zur Vereinfachung der Notation denken wir uns die Kugeln nummeriert.

Zufallsexperiment:

- Ziehen von n Kugeln nacheinander und Feststellung ihrer jeweiligen Farben.
  Vor jeder Ziehung einer Kugel werden die Kugeln in der Urne sorgfältig durchmischt.
- Ergebnis eines Experiments sind n Kugelfarben, k schwarze und $n - k$ rote.

Arten der Ziehung:

- Ziehen ohne Zurücklegen
  Eine gezogene Kugel wird vor Abschluss der n Ziehungen nicht in die Urne zurückgelegt.
- Ziehen mit Zurücklegen
  Eine gezogene Kugel wird vor der nächsten Ziehung in die Urne zurückgelegt.

Urnenmodell

Beispiel: Qualitätsprüfung einer Lieferung

- Eine Lieferung von N gleichartigen Produkten (Bauteile, Lebensmittel, ...) enthält einen unbekannten Anteil „Ausschuss“, also fehlerhafte Einheiten.

- Wie lässt sich der Anteil an Ausschuss abschätzen (um die Lieferung ggf. abzulehnen), wenn die Kapazität nicht ausreicht, alle N Produkte zu prüfen?

Urnenmodell

Beispiel: Qualitätsprüfung einer Lieferung

- Eine Lieferung von N gleichartigen Produkten (Bauteile, Lebensmittel, ...) enthält einen unbekannten Anteil „Ausschuss“, also fehlerhafte Einheiten.

- Wie lässt sich der Anteil an Ausschuss abschätzen (um die Lieferung ggf. abzulehnen), wenn die Kapazität nicht ausreicht, alle N Produkte zu prüfen?

- Vorgehen:
  - Stichprobe: Auswahl von n Einheiten aus der Lieferung von N Produkten.
  - Prüfung: Feststellung der Anzahl X fehlerhafter Einheiten.
  - Entscheidung: Wenn X einen vorher festgelegten Schwellwert c nicht überschreitet ($X \leq c$), wird die Lieferung angenommen, sonst abgelehnt.

Urnenmodell

Beispiel: Qualitätsprüfung einer Lieferung (Fortsetzung)

- Da der tatsächliche Anteil an Ausschuss nicht ermittelt werden wird, unterliegt X unvermeidbar statistischen Schwankungen.
- Es können daher nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Annahme bzw. Zurückweisung der Lieferung getroffen werden.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung?

Urnenmodell

Beispiel: Qualitätsprüfung einer Lieferung (Fortsetzung)

- Da der tatsächliche Anteil an Ausschuss nicht ermittelt werden wird, unterliegt X unvermeidbar statistischen Schwankungen.

- Es können daher nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Annahme bzw. Zurückweisung der Lieferung getroffen werden.

- Was ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung?

- Urnenmodell: Interpretiert man schwarze Kugeln als „fehlerhafte“ Einheiten und rote als „fehlerfreie“, ist der tatsächliche Ausschussanteil $\frac{K}{N}$.

- Zufallsexperiment: Die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ beim Ziehen von n Kugeln genau k schwarze zu erhalten kann so berechnet werden.

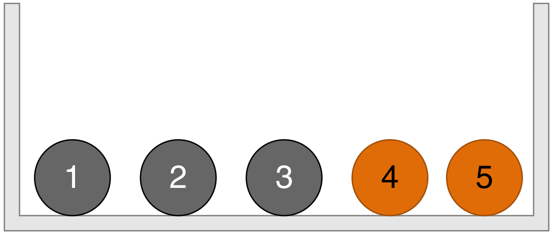
- Damit lässt sich auch die Frage nach $P(X \leq c)$ beantworten.
  $X \leq c$ entspricht dem Ereignis „Annahme der Lieferung“.

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:

- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln ohne Zurücklegen

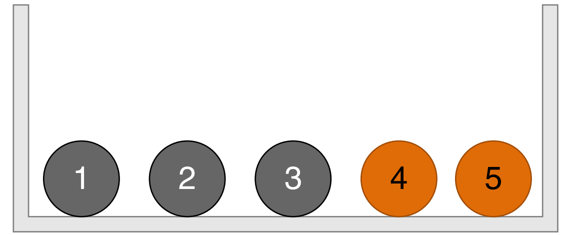


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen“)

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:

- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln ohne Zurücklegen
- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen“)

(a) Ergebnisraum und Ereigniszerlegung bei Beachtung der Reihenfolge:

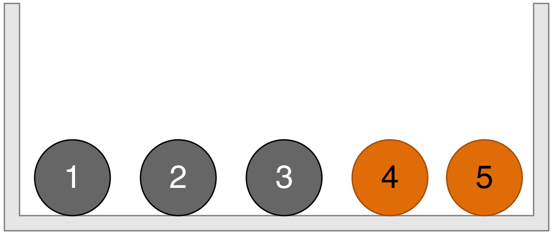
- $\Omega = \{(\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_2; \mathtt{s}_3); (\mathtt{s}_2; \mathtt{s}_1; \mathtt{s}_3); \ldots; (\mathtt{r}_5; \mathtt{r}_4; \mathtt{s}_3)\}$ ($\mathtt{s}$ für schwarz, $\mathtt{r}$ für rot, Index für Kugelnr.)
- $|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3$ (3-Permutationen aus der 5-Menge)
- „$X = 2$“ $=$ $\mathtt{ssr} \cup \mathtt{srs} \cup \mathtt{rss}$, wobei z.B. $\mathtt{ssr} = \{(\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_2; \mathtt{r}_4); \ldots; (\mathtt{s}_3; \mathtt{s}_2; \mathtt{r}_5)\}$
- $|\mathtt{ssr}| = |\mathtt{srs}| = |\mathtt{rss}| = 3 \cdot 2 \cdot 2$ (3 mögliche erste schwarze Kugeln; je 2 zweite bzw. rote)

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen (vgl. mit Zurücklegen)

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:

- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln ohne Zurücklegen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen“)

(a) Ergebnisraum und Ereigniszerlegung bei Beachtung der Reihenfolge:

- $\Omega = \{(\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_2; \mathtt{s}_3); (\mathtt{s}_2; \mathtt{s}_1; \mathtt{s}_3); \ldots; (\mathtt{r}_5; \mathtt{r}_4; \mathtt{s}_3)\}$ ($\mathtt{s}$ für schwarz, $\mathtt{r}$ für rot, Index für Kugelnr.)
- $|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3$ (3-Permutationen aus der 5-Menge)
- „$X = 2$“ $=$ $\mathtt{ssr} \cup \mathtt{srs} \cup \mathtt{rss}$, wobei z.B. $\mathtt{ssr} = \{(\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_2; \mathtt{r}_4); \ldots; (\mathtt{s}_3; \mathtt{s}_2; \mathtt{r}_5)\}$
- $|\mathtt{ssr}| = |\mathtt{srs}| = |\mathtt{rss}| = 3 \cdot 2 \cdot 2$ (3 mögliche erste schwarze Kugeln; je 2 zweite bzw. rote)

Daraus folgt:

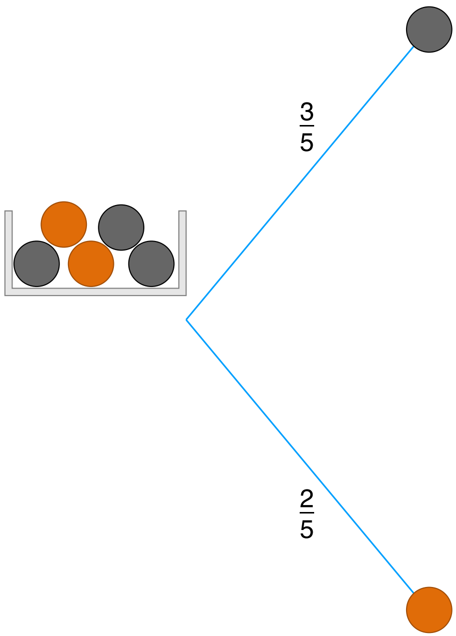
$$P(X = 2) \;=\; \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 3 \;=\; \frac{1}{5} \cdot 3 \;=\; 0{,}6\,.$$

Bemerkung:

- Zwei schwarze Kugeln lassen sich auf $\binom{3}{2} = 3$ Arten auf drei Plätze verteilen (`ssr`, `srs`, `rss`); was den Faktor 3 in der Gleichung erklärt.

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen



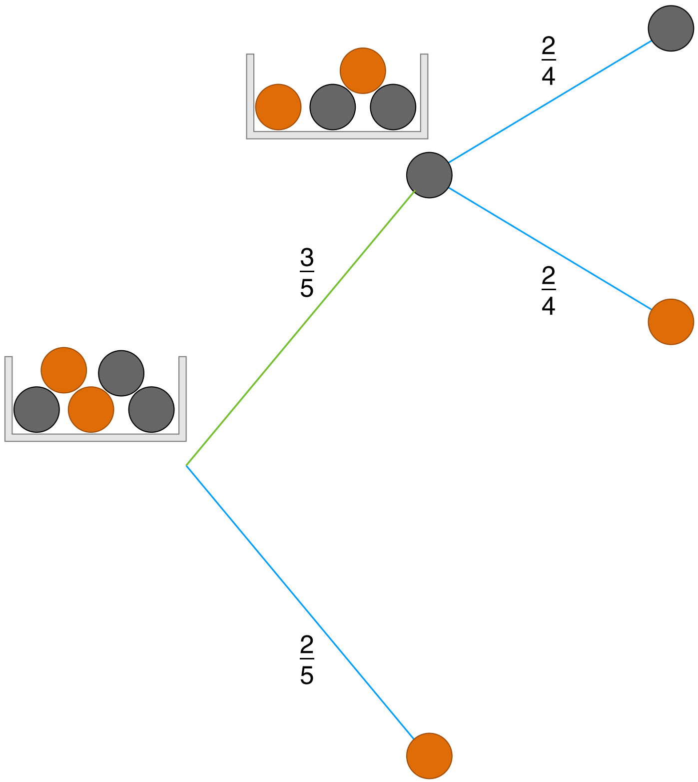
Baumdiagramm:

- Darstellung eines mehrstufigen Zufallsexperiments
- Wurzel: Ausgangszustand der Urne
- Knoten: Ereignis (hier: `s` oder `r`), das den Zustand der Urne verändert
- Kante: mögliches Elementarereignis der nächsten Ziehung
- Kantenbeschriftung: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses gemäß Anteilsregel
- Die gedachte Nummerierung der Kugeln wird zur Vereinfachung ignoriert.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Urnenmodell

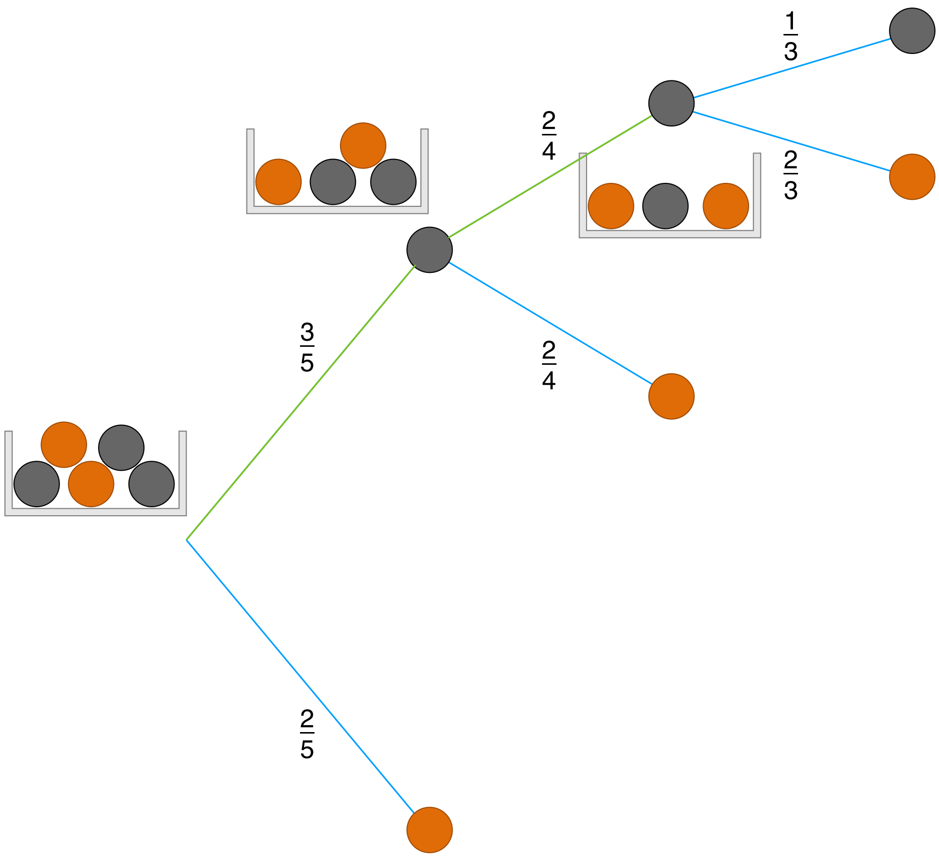
Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Urnenmodell

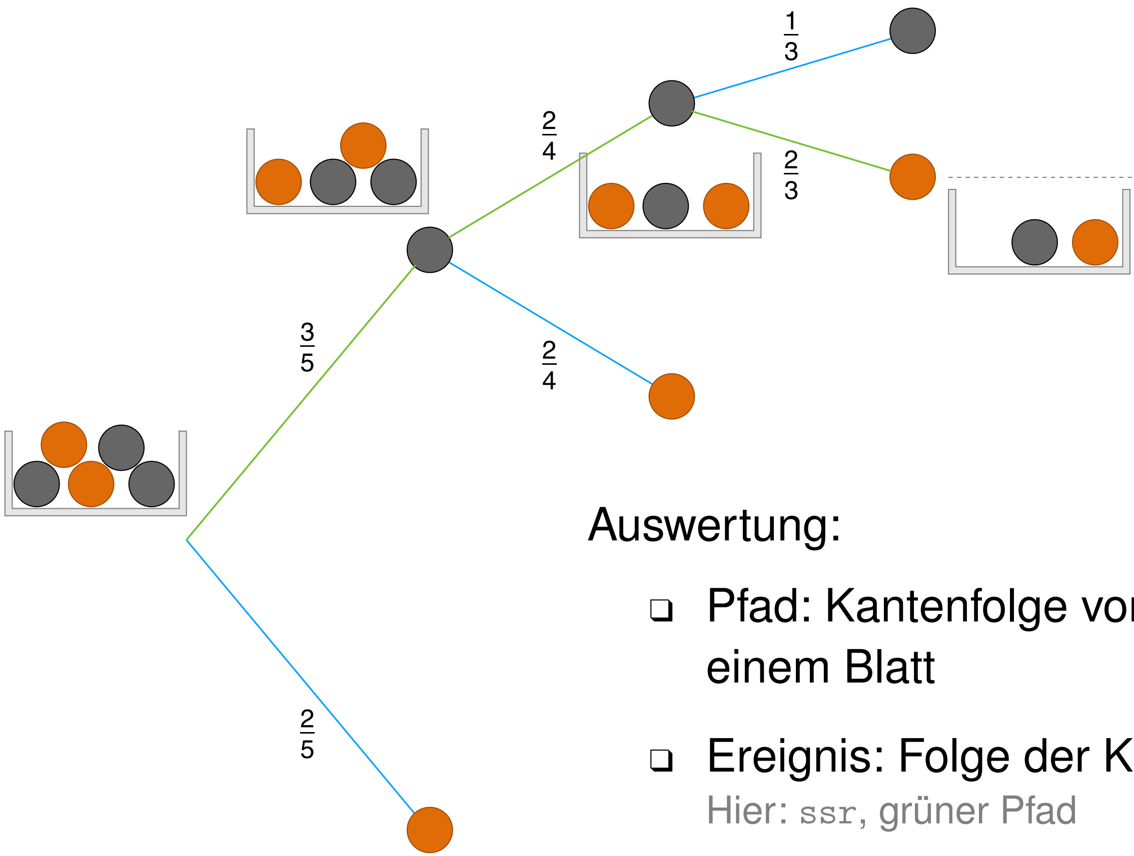
Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen



$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}$

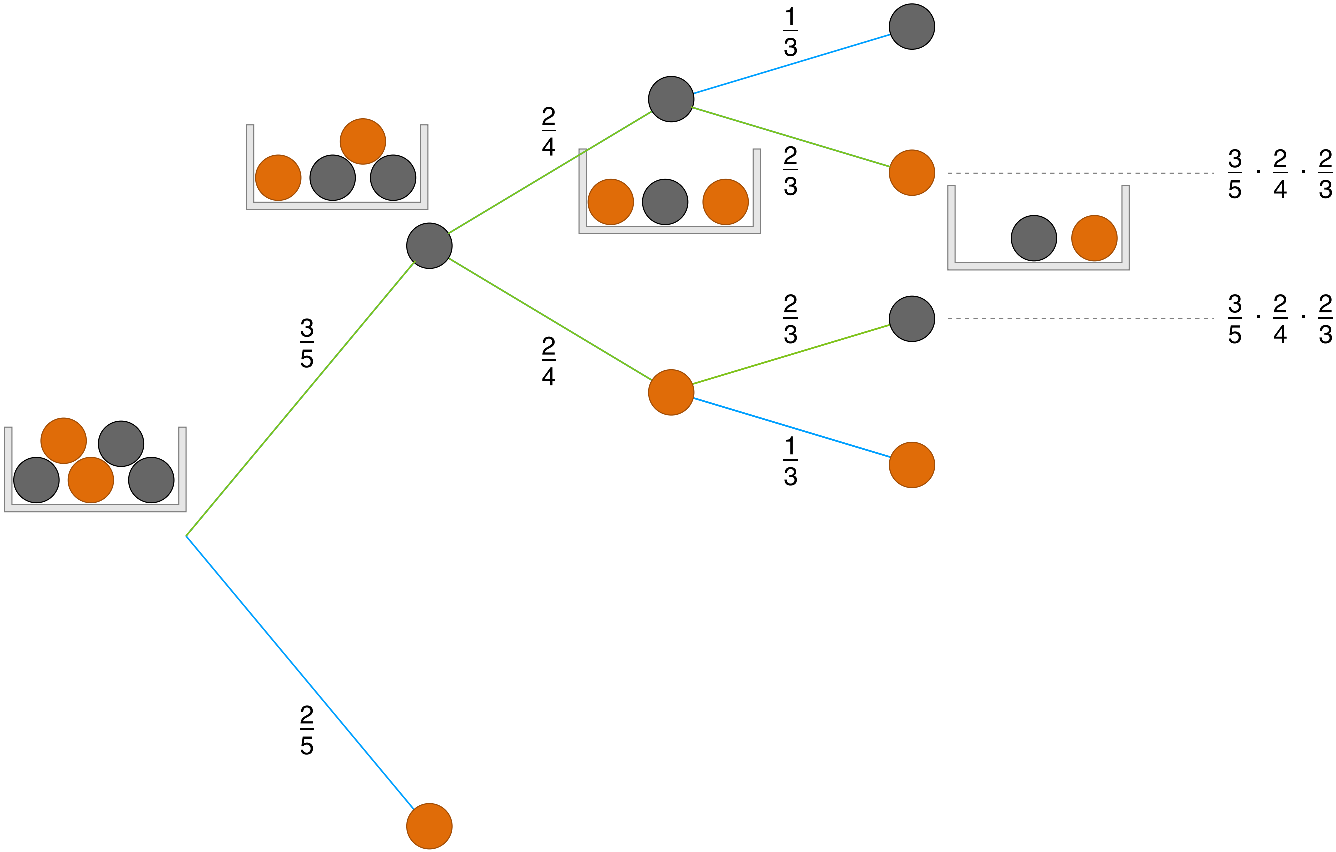
Auswertung:

- Pfad: Kantenfolge von der Wurzel zu einem Blatt
- Ereignis: Folge der Knoten am Pfad
  Hier: `ssr`, grüner Pfad
- Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Urnenmodell

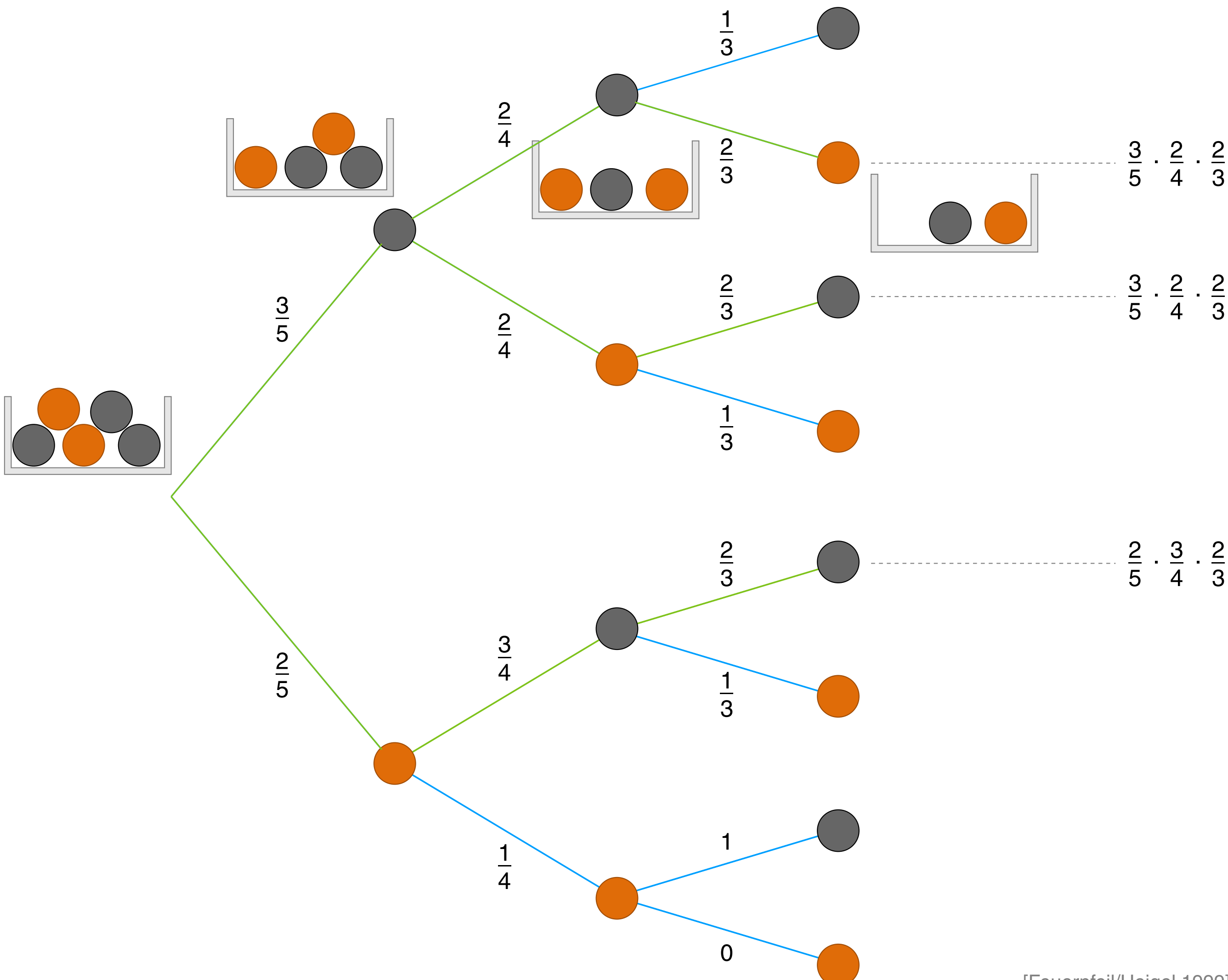
Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen (vgl. mit Zurücklegen)



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

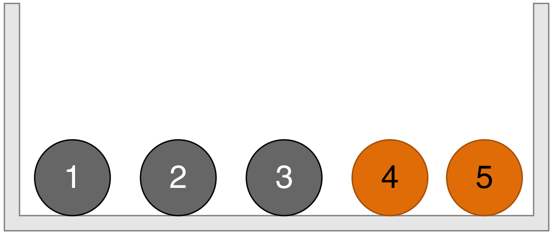
- Die sich aus dem Baumdiagramm ergebende Gesamtwahrscheinlichkeit für das Ereignis $X = 2$ entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten der drei günstigen Ereignisse:

$$P(X=2) \;=\; P(\mathtt{ssr}) + P(\mathtt{srs}) + P(\mathtt{rss}) \;=\; \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} \;=\; \frac{1}{5}\cdot 3 \;=\; 0{,}6\,.$$

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:



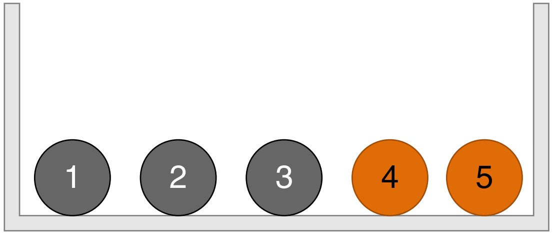
- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln ohne Zurücklegen

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen")

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:

- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln ohne Zurücklegen
- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen“)

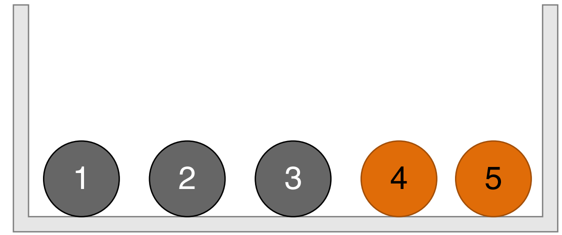
(b) Ergebnisraum und Ereigniszerlegung ohne Beachtung der Reihenfolge:

- $\Omega = \{\{\mathrm{s}_1; \mathrm{s}_2; \mathrm{s}_3\}; \{\mathrm{s}_1; \mathrm{s}_2; \mathrm{s}_4\}; \ldots; \{\mathrm{s}_3; \mathrm{s}_4; \mathrm{s}_5\}\}$
- $|\Omega| = \binom{5}{3}$ (3-Teilmengen aus der 5-Menge)
- „$X = 2$“ entspricht $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, zwei schwarze Kugeln auszuwählen, multipliziert mit $\binom{2}{1}$ Möglichkeiten, eine rote auszuwählen.

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln ohne Zurücklegen
- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen")

(b) Ergebnisraum und Ereigniszerlegung ohne Beachtung der Reihenfolge:

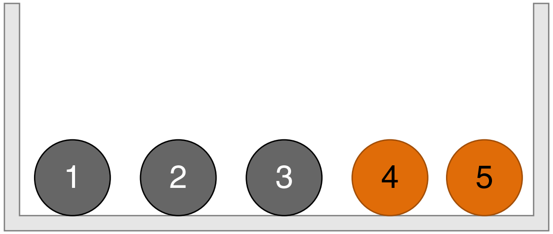
- $\Omega = \{\{\mathrm{s}_1; \mathrm{s}_2; \mathrm{s}_3\}; \{\mathrm{s}_1; \mathrm{s}_2; \mathrm{s}_4\}; \ldots; \{\mathrm{s}_3; \mathrm{s}_4; \mathrm{s}_5\}\}$
- $|\Omega| = \binom{5}{3}$ (3-Teilmengen aus der 5-Menge)
- „$X = 2$" entspricht $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, zwei schwarze Kugeln auszuwählen, multipliziert mit $\binom{2}{1}$ Möglichkeiten, eine rote auszuwählen.

Daraus folgt:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = 0{,}6 \ .$$

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen



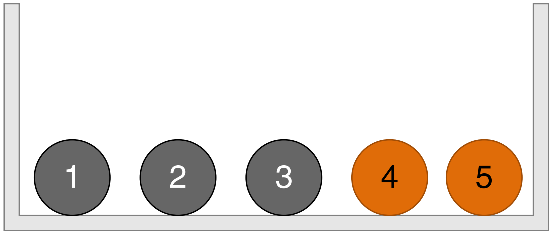
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:

- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln mit Zurücklegen
- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen“)

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:

- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln mit Zurücklegen
- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen“)

Ergebnisraum und Ereigniszerlegung bei Beachtung der Reihenfolge:

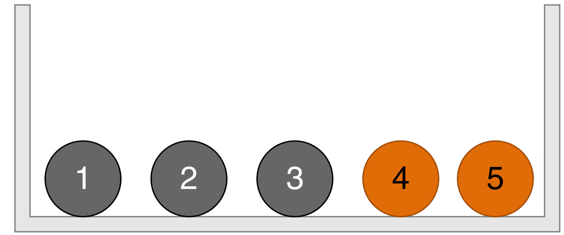
- $\Omega = \{(\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_1; \mathtt{s}_1); (\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_1; \mathtt{s}_2); \ldots; (\mathtt{r}_5; \mathtt{r}_5; \mathtt{s}_5)\}$ ($\mathtt{s}$ für schwarz, $\mathtt{r}$ für rot, Index für Kugelnr.)
- $|\Omega| = 5 \cdot 5 \cdot 5$ (3-Tupel aus der 5-Menge)
- „$X = 2$“ $=$ $\mathtt{ssr} \cup \mathtt{srs} \cup \mathtt{rss}$, wobei z.B. $\mathtt{ssr} = \{(\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_1; \mathtt{r}_4); \ldots; (\mathtt{s}_3; \mathtt{s}_3; \mathtt{r}_5)\}$)
- $|\mathtt{ssr}| = |\mathtt{srs}| = |\mathtt{rss}| = 3 \cdot 3 \cdot 2$ (je 3 mögliche erste und zweite schwarze Kugeln; 2 rote)

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen (vgl. ohne Zurücklegen)

Zufallsexperiment und interessierendes Ereignis:

- Urne mit 3 schwarzen und 2 roten Kugeln
- Ziehung dreier Kugeln mit Zurücklegen



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Sei X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$? („genau 2 schwarze Kugeln gezogen“)

Ergebnisraum und Ereigniszerlegung bei Beachtung der Reihenfolge:

- $\Omega = \{(\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_1; \mathtt{s}_1); (\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_1; \mathtt{s}_2); \ldots; (\mathtt{r}_5; \mathtt{r}_5; \mathtt{s}_5)\}$ ($\mathtt{s}$ für schwarz, $\mathtt{r}$ für rot, Index für Kugelnr.)
- $|\Omega| = 5 \cdot 5 \cdot 5$ (3-Tupel aus der 5-Menge)
- „$X = 2$“ $=$ $\mathtt{ssr} \cup \mathtt{srs} \cup \mathtt{rss}$, wobei z.B. $\mathtt{ssr} = \{(\mathtt{s}_1; \mathtt{s}_1; \mathtt{r}_4); \ldots; (\mathtt{s}_3; \mathtt{s}_3; \mathtt{r}_5)\}$)
- $|\mathtt{ssr}| = |\mathtt{srs}| = |\mathtt{rss}| = 3 \cdot 3 \cdot 2$ (je 3 mögliche erste und zweite schwarze Kugeln; 2 rote)

Daraus folgt:

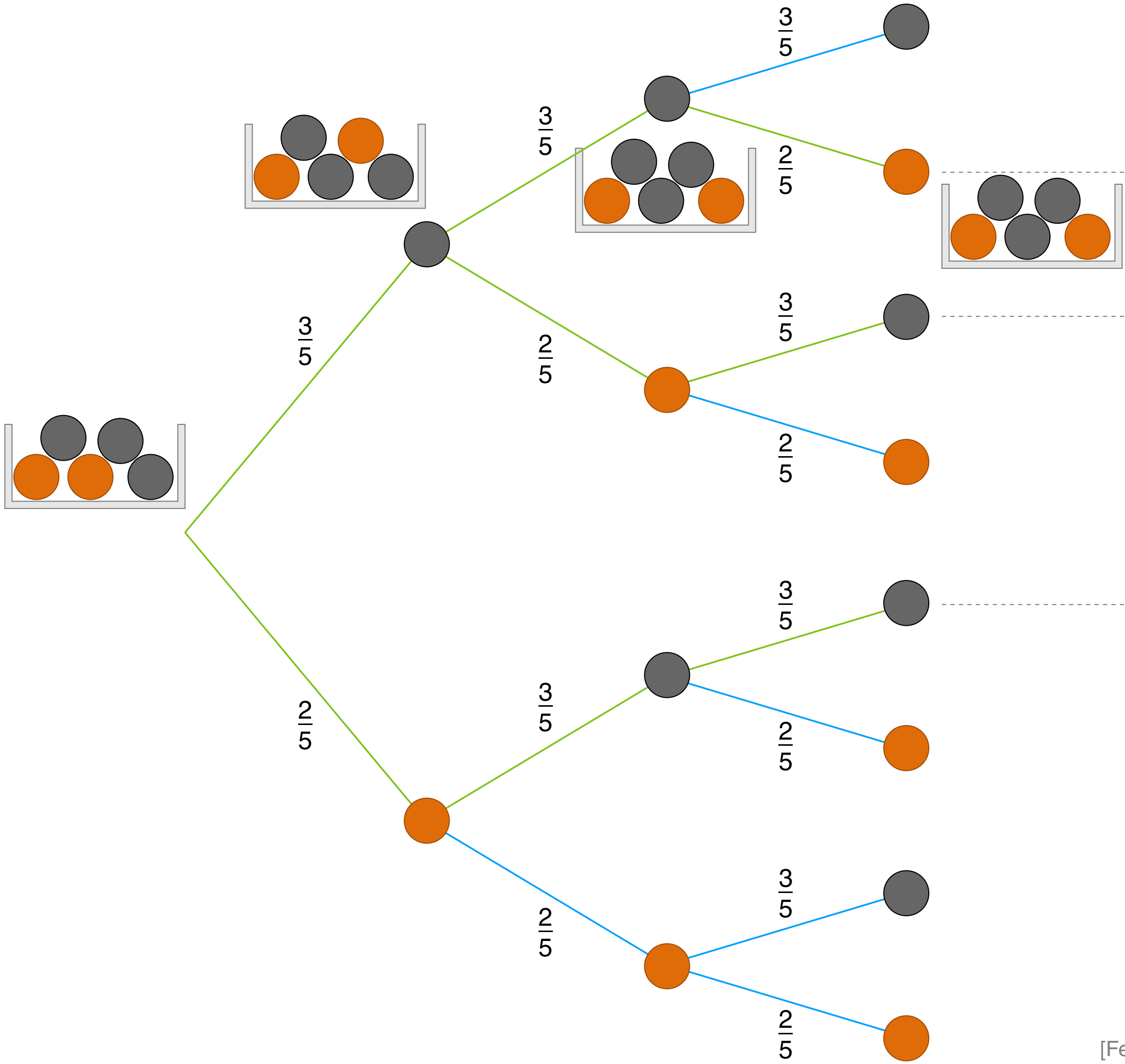
$$P(X = 2) \;=\; \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 3 \;=\; 0{,}432\,.$$

Bemerkung:

- Zwei schwarze Kugeln lassen sich auf $\binom{3}{2} = 3$ Arten auf drei Plätze verteilen (`ssr`, `srs`, `rss`); dies ist also eigentlich der Faktor 3 in der Gleichung.

Urnenmodell

Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen (vgl. ohne Zurücklegen)



$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Die sich aus dem Baumdiagramm ergebende Gesamtwahrscheinlichkeit für das Ereignis $X = 2$ entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten der drei günstigen Ereignisse:

$$P(X=2) \ = \ P(\texttt{ssr}) + P(\texttt{srs}) + P(\texttt{rss}) \ = \ \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \ = \ 0{,}432 \, .$$

Urnenmodell

Verallgemeinerung

Zufallsexperiment:

- Urne mit N nummerierten Kugeln, davon K schwarz und $N - K$ rot
- Ziehung von n Kugeln ohne Zurücklegen; davon X schwarze
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$, exakt k schwarze Kugeln zu ziehen?

Urnenmodell

Verallgemeinerung

Zufallsexperiment:

- Urne mit N nummerierten Kugeln, davon K schwarz und $N - K$ rot
- Ziehung von n Kugeln ohne Zurücklegen; davon X schwarze
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$, exakt k schwarze Kugeln zu ziehen?

Mächtigkeiten:

- Berücksichtigung der Reihenfolge nicht notwendig.
- Ω ist die Menge der n-Teilmengen aus der N-Menge $\{1; 2; \ldots; N\}$: $|\Omega| = \binom{N}{n}$
- Zahl der k-Teilmengen aus der K-Menge schwarzer Kugeln: $\binom{K}{k}$
- Zahl der $(n-k)$-Teilmengen aus der $(N-K)$-Menge roter Kugeln: $\binom{N-K}{n-k}$
- Gemäß Zählprinzip gibt es $\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}$ Möglichkeiten, n-Teilmengen mit k schwarzen und $(n-k)$ roten Kugeln zu bilden.

Urnenmodell
Verallgemeinerung

Zufallsexperiment:

- Urne mit N nummerierten Kugeln, davon K schwarz und $N-K$ rot
- Ziehung von n Kugeln ohne Zurücklegen; davon X schwarze
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$, exakt k schwarze Kugeln zu ziehen?

Mächtigkeiten:

- Berücksichtigung der Reihenfolge nicht notwendig.
- Ω ist die Menge der n-Teilmengen aus der N-Menge $\{1;2;\ldots;N\}$: $|\Omega| = \binom{N}{n}$
- Zahl der k-Teilmengen aus der K-Menge schwarzer Kugeln: $\binom{K}{k}$
- Zahl der $(n-k)$-Teilmengen aus der $(N-K)$-Menge roter Kugeln: $\binom{N-K}{n-k}$
- Gemäß Zählprinzip gibt es $\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}$ Möglichkeiten, n-Teilmengen mit k schwarzen und $(n-k)$ roten Kugeln zu bilden.

Daraus folgt:

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (0 \leq k \leq n,\ k \leq K,\ n-k \leq N-K)\ .$$

Urnenmodell

Verallgemeinerung

Zufallsexperiment:

- Urne mit N nummerierten Kugeln, davon K schwarz und $N - K$ rot
- Ziehung von n Kugeln mit Zurücklegen; davon X schwarze
- Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$, exakt k schwarze Kugeln zu ziehen?

Mächtigkeiten:

- Berücksichtigung der Reihenfolge zweckmäßig.
- Ω ist die Menge der n-Tupel aus der N-Menge $\{1; 2; \ldots; N\}$: $|\Omega| = N^n$
- Jeder Platz einer schwarzen Kugel kann auf K Arten belegt werdern: K^k
- Jeder Platz einer roten Kugel kann auf $(N–K)$ Arten belegt werden: $(N–K)^{n-k}$
- Genau k schwarze Kugeln können auf $\binom{n}{k}$ Arten auf die Positionen 1 bis n eines n-Tupels verteilt werden.

Daraus folgt:

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k} \cdot K^k \cdot (N - K)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} .$$

Urnenmodell

Verallgemeinerung

Satz 12

Zieht man aus einer Urne mit N Kugeln, von denen K schwarz sind, n Kugeln ohne Zurücklegen, so gilt für die Anzahl X der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (0 \leq k \leq n,\, k \leq K,\, n - k \leq N - K)\ .$$

Sei $\frac{K}{N} = p$ der Anteil schwarzer Kugeln.

Satz 13

Der Anteil der schwarzen Kugeln in einer Urne mit gleichartigen Kugeln sei p. Zieht man aus dieser Urne n Kugeln mit Zurücklegen, so gilt für die Anzahl X der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \qquad (k \in [0; 1; \ldots ; n])\ .$$

Bemerkungen:

- Anwendungsmöglichkeiten des Urnenmodells ohne Zurücklegen sind beispielsweise Meinungsumfragen oder Qualitätskontrollen. Es werden dabei jeweils „Objekte“ entnommen (Befragte oder Exemplare von Produkten), die üblicherweise nicht mehrmals befragt oder kontrolliert werden.

- Ist in der Qualitätskontrolle der Stichprobenumfang eher klein (bspw. höchstens 10% und damit $n \leq 0{,}1 \cdot N$), so bleibt der Anteil p der defekten Stücke bei der Entnahme der Stichprobe meist quasi unverändert. Man kann dann zur näherungsweisen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit oft ohne zu große Ungenauigkeit die rechnerisch aufwändige Formel aus Satz 12 durch die einfachere Formel von Satz 13 ersetzen, obwohl Qualitätskontrolle ja eigentlich ohne Zurücklegen durchgeführt wird.

- Satz 13 behält auch dann seinen Sinn, wenn p nicht rational ist und man sich gar nicht mehr auf das Urnenmodell beziehen kann. Mehr dazu im Abschnitt zur Binomialverteilung.

- Eine ganz andere Frage ist, vom in einer Stichprobe beobachteten „Ausschussanteil“ auf den tatsächlichen Ausschussanteil in der Grundgesamtheit zurückzuschließen. Mehr dazu im Abschnitt zum Hypothesentesten.

Urnenmodell

Beispiel: Qualitätskontrolle einer Lieferung (Fortsetzung)

- Angenommen, 8 von 25 Einheiten einer Lieferung sind defekt.
- Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass von 6 zufällig ausgewählten Einheiten: (a) mindestens 4 funktionieren, (b) höchstens 2 defekt sind?

Urnenmodell

Beispiel: Qualitätskontrolle einer Lieferung (Fortsetzung)

- Angenommen, 8 von 25 Einheiten einer Lieferung sind defekt.
- Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass von 6 zufällig ausgewählten Einheiten: (a) mindestens 4 funktionieren, (b) höchstens 2 defekt sind?

- (a) und (b) unterscheiden sich nur in der Formulierung, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dieselbe.
- Die Stichprobengröße ist mit $0{,}24$ eher groß ➜ Satz 12

Urnenmodell

Beispiel: Qualitätskontrolle einer Lieferung (Fortsetzung)

- Angenommen, 8 von 25 Einheiten einer Lieferung sind defekt.
- Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass von 6 zufällig ausgewählten Einheiten: (a) mindestens 4 funktionieren, (b) höchstens 2 defekt sind?

- (a) und (b) unterscheiden sich nur in der Formulierung, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dieselbe.
- Die Stichprobengröße ist mit $0{,}24$ eher groß ➜ Satz 12

- Sei X die Zahl der defekten Einheiten der Stichprobe und gemäß (b) $c = 2$.
- Dann gilt:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25-8}{6-k}}{\binom{25}{6}} \approx 0{,}73 \,.$$

Urnenmodell

Beispiel: Qualitätskontrolle einer Lieferung (Fortsetzung)

- Angenommen, 8 von 25 Einheiten einer Lieferung sind defekt.
- Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass von 6 zufällig ausgewählten Einheiten: (a) mindestens 4 funktionieren, (b) höchstens 2 defekt sind?

- (a) und (b) unterscheiden sich nur in der Formulierung, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dieselbe.
- Die Stichprobengröße ist mit $0{,}24$ eher groß ➜ Satz 12

- Sei X die Zahl der defekten Einheiten der Stichprobe und gemäß (b) $c = 2$.
- Dann gilt:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25-8}{6-k}}{\binom{25}{6}} \approx 0{,}73 \,.$$

➜ Wenn 8 defekte Einheiten zu viel sind, wird die Lieferung in 73% der Fälle angenommen; eine größere Stichprobe verringert diese Wahrscheinlichkeit.